Cinq petits théorèmes d'unicité L^3 des solutions des équations de Navier–Stokes sur $\mathbb{R}^3$.

Pierre Gilles LEMARIÉ-RIEUSSET
Département de Mathématiques
Université d'Evry
Bd des Coquibus, 91025 Evry Cedex, France
e-mail: lemarie@lami.univ-evry.fr

Introduction

Les équations de Navier-Stokes que nous considérons sont les équations suivantes sur $\vec{u}(t,x), t \in]0,T[, x \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \vec{\nabla}.(\vec{u} \otimes \vec{u}) - \vec{\nabla} p \\ \vec{\nabla}.\vec{u} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

où p est la *pression* (inconnue), dont le rôle est de maintenir la divergence de $\vec{u}$ égale à 0. Nous parlerons de *solution faible* $\vec{u}$ losque $\vec{u} \in (L^2_{loc}(]0,T[\times \mathbb{R}^3))^3$, $p \in \mathcal{D}'(]0,T[\times\mathbb{R}^3)$ et que les dérivations sont prises dans (1) au sens des distributions.

Le but de cet article est de donner un rapide survol de diverses démonstrations du théorème suivant:

Théorème 0: (unicité L^3)
Si $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont deux solutions des équations de Navier–Stokes sur $]0,T[\times\mathbb{R}^3$ telles que $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ appartiennent à $\mathcal{C}([0,T[,(L^3(\mathbb{R}^3))^3)$ et $\vec{u}_1(0,.) = \vec{u}_2(0,.)$, alors $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$.

1. La théorie classique des équations de Navier–Stokes (1934-1984).

La théorie des équations de Navier–Stokes dans $\mathbb{R}^3$ repose essentiellement sur trois papiers: l'article phare de Leray de 1934 [LER] prouvant l'existence de solutions faibles en tout temps pour une donnée initiale L^2, l'article de Kato de 1984 [KAT] prouvant l'existence de solutions milds globales pour une donnée initiale L^3 de norme suffisamment petite et l'article de Caffarelli, Kohn et Nirenberg de 1982 [CKN] montrant qu'une inégalité d'énergie locale et la petitesse locale de certaines normes entraîne un contrôle local de la taille de la solution. Le problème de l'unicité des solutions faibles de Leray reste ouvert; celui des solutions milds L^3 a récemment connu de nombreux rebondissements où chacun des trois articles fondateurs de la théorie joue son rôle.

Si $\vec{u}$ est une solution des équations de Navier–Stokes suffisamment régulière pour jouer le rôle de fonction test pour $\partial_t \vec{u}$, (1) donne

$$\partial_t |\vec{u}|^2 = 2\partial_t \vec{u}.\vec{u} = 2\Delta\vec{u}.\vec{u} - 2\vec{\nabla} \otimes \vec{u}.\vec{u} \otimes \vec{u} - 2\vec{\nabla} p.\vec{u}$$

puis par intégration contre une fonction test $\phi \in \mathcal{D}(]0,T[\times\mathbb{R}^3)$

$$\int\int |\vec{u}|^2 \partial_t \phi \, dx \, dt - 2\int\int |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 \, \phi \, dx \, dt + \int\int |\vec{u}|^2 \Delta\phi \, dx \, dt + \int\int (|\vec{u}|^2 + 2p) \, (\vec{u}.\vec{\nabla})\phi \, dx \, dt = 0$$

et enfin si $\vec{u}$ est suffisamment intégrable pour laisser tendre $\phi(s,x)$ vers $1_{]0,t[}(s)$

$$\int |\vec{u}(t,x)|^2 \, dx + 2\int\int_0^t |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}(s,x)|^2 \, dx \, ds = \int |\vec{u}(0,x)|^2 \, dx$$

Malheureusement, pour une donnée initiale $\vec{u}_0 \in (L^2)^3$, nous ne savons pas construire une solution suffisamment régulière pour justifier les calculs formels que nous venons de développer. L'idée de Leray [LER] a été d'atténuer la non-linéarité des équations de Navier–Stokes pour obtenir des solutions régulières: il considère une fonction $\omega \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ d'intégrale 1 et l'approximation de la masse de Dirac par les fonctions $\omega_\epsilon = \frac{1}{\epsilon^3}\omega(\frac{x}{\epsilon})$ et il remplace (1) par

$$(2-\epsilon) \qquad \begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \vec{\nabla}.((\vec{u} * \omega_\epsilon) \otimes \vec{u}) - \vec{\nabla} p \\ \vec{\nabla}.\vec{u} = 0 \end{cases}$$

A une donnée initiale $\vec{u}_0$ dans $(L^2)^3$ de divergence nulle, on peut associer une solution $(\vec{u}_\epsilon, p_\epsilon)$ de $(2-\epsilon)$ qui est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,\infty[\times\mathbb{R}^3$ et pour laquelle on obtient les égalités :

$$-\int\int |\vec{u}_\epsilon|^2 \partial_t \phi \; dx \; dt + 2\int\int |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_\epsilon|^2 \; \phi \; dx \; dt =$$

$$= \int\int |\vec{u}_\epsilon|^2 \Delta\phi \; dx \; dt + \int\int (|\vec{u}_\epsilon|^2 \; ((\vec{u}_\epsilon * \omega_\epsilon).\vec{\nabla}) \; \phi \; dx \; dt + 2\int\int p_\epsilon \; (\vec{u}_\epsilon.\vec{\nabla})\phi \; dx \; dt$$

et

$$\int |\vec{u}_\epsilon(t,x)|^2 \; dx + 2\int\int_0^t |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_\epsilon(s,x)|^2 \; \; dx \; ds = \int |\vec{u}(0,x)|^2 \; dx$$

Un argument de compacité faible permet alors de faire converger une suite $\vec{u}_\epsilon$ vers une solution des équations de Navier–Stokes; cependant, le terme $\vec{\nabla}\otimes\vec{u}_\epsilon$ ne converge que faiblement et nous devons remplacer les égalités ci-dessus par des inégalités en partant de ce que pour $\phi \geq 0$ on a

$$\int\int |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 \; \phi \; dx \; dt \leq \liminf \int\int |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_\epsilon|^2 \; \phi \; dx \; dt$$

On obtient alors le théorème d'existence des solutions de Leray :

Théorème A: (Théorème d'existence de Leray)
Si $\vec{u}_0 \in (L^2(\mathbb{R}^3))^3$ vérifie $\vec{\nabla}.\vec{u}_0 = 0$, il existe une solution faible $\vec{u} \in L^\infty(]0,\infty[,(L^2)^3) \cap L^2(]0,\infty[,(\dot{H}^1)^3)$ des équations de Navier–Stokes sur $]0,\infty[\times\mathbb{R}^3$ telle que $\lim_{t\to 0^+} \|\vec{u} - \vec{u}_0\|_2 = 0$. De plus, on peut imposer à cette solution $\vec{u}$ l'inégalité d'énergie suivante :

$$(3) \qquad \forall t > 0 \quad \|\vec{u}(t,.)\|_2^2 + 2\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 \; dx \; ds \leq \|\vec{u}_0\|_2^2$$

et même l'inégalité d'énergie locale suivante:

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(]0,T[\times\mathbb{R}^3), \phi \geq 0, \; 2\int\int |\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2 \; \phi \, dx \, dt \leq \int\int |\vec{u}|^2 \; (\partial_t\phi + \Delta\phi) \; dx \; dt + \int\int (|\vec{u}|^2 + 2p) \; (\vec{u}.\vec{\nabla})\phi \; dx \; dt$$

Le rôle de cette dernière inégalité a été illustré par les travaux de Scheffer [SCH], puis de Caffarelli, Kohn et Nirenberg [CKN]. Rappelons qu'une solution $\vec{u}$ est dite régulière au sens de Caffarelli, Kohn et Nirenberg si $\vec{\nabla} \otimes \vec{u} \in (L^2_{loc}(]0,T[\times\mathbb{R}^3))^9$, $p \in L^{5/3}_{loc}(]0,T[\times\mathbb{R}^3)$, si pour toute $\phi \in \mathcal{D}((0,T) \times \mathbb{R}^3)$ $\phi\vec{u} \in L^\infty_t((L^2_x)^3)$ et si enfin $\vec{u}$ vérifie l'inégalité d'énergie suivante : pour toute $\phi \in \mathcal{D}(]0,\infty[\times\mathbb{R}^3)$ telle que $\phi \geq 0$ on a

$$(4) \qquad 2\int\int |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 \; \phi(t,x) \; dx \; dt \leq \int\int |\vec{u}|^2 \; (\partial_t\phi + \Delta\phi) \; dx \; dt + \int\int (|\vec{u}|^2 + 2p)(\vec{u}.\vec{\nabla})\phi \; \; dx \; dt$$

Nous dirons souvent de manière plus condensée que $\vec{u}$ est régulière CKN.

Le résultat de Caffarelli, Kohn et Nirenberg est alors le suivant :

Théorème B: (Critère de Caffarelli, Kohn et Nirenberg)

Il existe deux constantes positives ϵ_1 et C_1 telles que pour tout $T > 0$, pour toute solution $\vec{u}$ des équations de Navier–Stokes sur $(0,T) \times \mathbb{R}^3$ régulière au sens de Caffarelli, Kohn et Nirenberg, si $x_0 \in \mathbb{R}^3$ et $0 < t_0$ et si pour un r dans $(0, \sqrt{t_0})$ on a

$$\int\int_{|x-x_0|<r, t_0-r^2<s<t_0} |\vec{u}|^3 + |p|^{3/2} \, dx \, ds < \epsilon_1 \, r^2$$

alors

$$\sup_{|x-x_0|<r/2, t_0-r^2/4<s<t_0} |\vec{u}| < C_1 \, r^{-1}.$$

L'unicité et la régularité des solutions de Leray reste un problème ouvert. Des résultats partiels d'unicité ont été donnés par Serrin dans les années 60 [SER] et par Sohr et Von Wahl dans les années 80 [WAH]:

Théorème C: (Théorème d'unicité de Serrin)

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux solutions faibles des équations de Navier–Stokes sur $]0,T[\times \mathbb{R}^3$ qui appartiennent à $L^\infty(]0,T[,(L^2)^3) \cap L^2(]0,T[,(H^1)^3)$ et ont la même valeur initiale $\vec{u}_0$ en $t=0$, si de plus $\vec{u}$ appartient à $L^r(]0,T[,(L^p)^3)$ où $3 < p \leq \infty$ et $2/r = 1 - 3/p$ et si $\vec{v}$ satisfait l'inégalité d'énergie de Leray $\|\vec{v}(t,.)\|_2^2 + 2\int_0^t \|\vec{\nabla} \otimes \vec{v}(s,.)\|_2^2 \, ds \leq \|\vec{u}_0\|_2^2$ pour tout $t \in]0,T[$, alors $\vec{u} = \vec{v}$.

Théorème D: (Théorème d'unicité de Sohr et Von Wahl)

(A) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux solutions faibles des équations de Navier–Stokes sur $]0,T[\times \mathbb{R}^3$ qui appartiennent à $L^\infty(]0,T[,(L^2)^3) \cap L^2(]0,T[,(H^1)^3)$ et ont la même valeur initiale $\vec{u}_0$ en $t=0$, si de plus $\vec{u}$ appartient à $\mathcal{C}([0,T),(L^3)^3)$ et si $\vec{v}$ satisfait l'inégalité d'énergie de Leray $\|\vec{v}(t,.)\|_2^2 + 2\int_0^t \|\vec{\nabla} \otimes \vec{v}(s,.)\|_2^2 \, ds \leq \|\vec{u}_0\|_2^2$ pour tout $t \in]0,T[$, alors $\vec{u} = \vec{v}$.

(B) En particulier, si $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont deux solutions des équations de Navier–Stokes sur $]0,T[\times \mathbb{R}^3$ telles que $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ appartiennent à $\mathcal{C}([0,T[,(L^3(\mathbb{R}^3))^3) \cap L^\infty(]0,T[,(L^2)^3) \cap L^2(]0,T[,(H^1)^3)$ et $\vec{u}_1(0,.) = \vec{u}_2(0,.)$, alors $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$.

Ces deux derniers théorèmes reposent sur l'estimation de $\|\vec{u}-\vec{v}\|_2^2 = \|\vec{v}\|_2^2 - \|\vec{u}_0\|_2^2 - 2\int\int_0^t \, \partial_t(\vec{u}.\vec{v}) \, ds \, dx + \int\int_0^t \, \partial_t(|\vec{u}|^2) \, ds \, dx$; le terme $\|\vec{v}\|_2^2 - \|\vec{u}_0\|_2^2$ se contrôle par l'inégalité d'énergie et les termes $\partial_t(\vec{u}.\vec{v})$ et $\partial_t(|\vec{u}|^2)$ se calculent facilement car $\vec{u}$ est suffisamment régulière. Des généralisations du théorème de Sohr et Von Wahl, toujours pour des solutions vérifiant l'inégalité d'énergie, ont été récemment données par Chemin [CHE].

Une autre approche des équations de Navier–Stokes n'utilise pas les inégalités d'énergie : il s'agit des solutions milds de Kato [FUK] [KAT]. Prenant la divergence de (1), on obtient l'équation

$$\Delta p + \vec{\nabla}.(\vec{\nabla}.\vec{u} \otimes \vec{u}) = 0$$

ce qui permet d'éliminer p en introduisant l'opérateur $\mathbb{P}\vec{u} = \vec{u} - \vec{\nabla}\frac{1}{\Delta}(\vec{\nabla}.\vec{u})$. On obtient alors :

$$(5) \qquad \begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \mathbb{P} \, \vec{\nabla}.(\vec{u} \otimes \vec{u}) \\ \vec{\nabla}.\vec{u} = 0 \end{cases}$$

qui se résout en

$$(6) \qquad \begin{cases} \vec{u} = e^{t\Delta} \, \vec{u}_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \, \vec{\nabla}.(\vec{u} \otimes \vec{u}) \, ds \\ \vec{\nabla}.\vec{u}_0 = 0 \end{cases}$$

L'équivalence de (1), (5) et (6) se montre sous des hypothèses assez générales, comme par exemple $\vec{u} \in L^2(]0,T[,(E_2)^3)$ où E_2 est la version locale de L^2 définie par $f \in L^2_{loc}$ et $\lim_{x\to\infty} \int_{|y-x|\le 1} |f(y)|^2\, dy = 0$ (voir [FLT] pour une démonstration).

L'approche la plus simple des équations de Navier–Stokes est donc de remplacer le problème différentiel par sa formulation intégrale et de rechercher les solutions comme points fixes de ce second problème dans un espace de Banach bien choisi.

On est donc ramené à la recherche de points fixes de la transformation $\vec{u} \to \vec{u}_0 - B(\vec{u},\vec{u})$ où $B(\vec{u},\vec{v}) = \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}\ \vec{\nabla}.(\vec{u}\otimes\vec{v})\, ds$. Ce problème se traite par l'étude des propriétés de continuité et de contractivité de B. Dans la plupart des cas, on peut se ramener à l'étude de l'opérateur scalaire plus simple $A(u,v) = \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\ \sqrt{-\Delta}\ (u\ v)\, ds$, B se décomposant en l'action d'une matrice d'opérateurs de Calderón–Zygmund sur les fonctions $A(u_i v_j)$. On obtient ainsi facilement l'existence locale de solutions lorsque la donnée initiale est L^p avec $3 < p < \infty$.

Dans le cas $p = 3$, une difficulté surgit : A n'est pas continu sur $\mathcal{C}([0,T],L^3)$, et de même B n'est pas continu sur $\{\vec{u} \in (\mathcal{C}([0,T],L^3))^3\ /\ \vec{\nabla}.\vec{u} = 0\ \}$ [ORU]. L'idée de Weissler est d'alors d'introduire dans l'espace de Banach des solutions un contrôle de la norme L^∞ grâce aux propriétés de régularisation du noyau de la chaleur [WEI]. On obtient alors le résultat suivant [KAT]:

Théorème E: (Solutions de Kato–Weissler)

(A) L'opérateur A est continu de $E_T \times E_T$ dans E_T où

$$E_T = \{u \in \mathcal{C}([0,T[,L^3)\ /\ \sup_{0<t<T} \|u\|_3 < \infty,\ \sup_{0<t<T} \sqrt{t}\ \|u\|_\infty < \infty, \lim_{t\to 0} \sqrt{t}\ \|u\|_\infty = 0\}$$

normé par $\|u\|_{E_T} = \sup_{0<t<T} \|u\|_3 + \sup_{0<t<T} \sqrt{t}\ \|u\|_\infty$ $(0 < T \le \infty)$.

Plus précisément, on a, pour une constante C_0 ne dépendant ni de t ni de T :

$$\|A(u,v)(t)\|_3 \le C_0 \sup_{0<s<t} \sqrt{s}\ \|u\|_\infty \sup_{0<s<t} \|v\|_3$$

et

$$\sqrt{t}\ \|A(u,v)(t)\|_\infty \le C_0 \sup_{0<s<t} \sqrt{s}\ \|u\|_\infty \sqrt{\sup_{0<s<t} \|v\|_3 \sup_{0<s<t} \sqrt{s}\ \|v\|_\infty}$$

(B) Pour tout $\vec{u}_0 \in (L^3(\mathbb{R}^3))^3$ avec $\vec{\nabla}.\vec{u}_0 = 0$, il existe $T > 0$ et une solution $\vec{u} \in (E_T)^3$ des équations de Navier–Stokes sur $]0,T[\times\mathbb{R}^3$ avec $\vec{u}(0) = \vec{u}_0$. De plus, il existe une constante $\epsilon_0 > 0$ tel que $T = +\infty$ dès que $\|\vec{u}_0\|_3 < \epsilon_0$.

(C) De plus, si $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont deux solutions des équations de Navier–Stokes sur $]0,T[\times\mathbb{R}^3$ telles que $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ appartiennent à $(E_T)^3$ et $\vec{u}_1(0,.) = \vec{u}_2(0,.)$, alors $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$.

La démonstration de ce théorème repose sur un argument simple : l'opérateur $e^{(t-s)\Delta}\ \sqrt{-(t-s)\Delta}$ est une convolution avec $k(t-s,x) = \frac{1}{(t-s)^{3/2}} k(\frac{x}{\sqrt{t-s}})$ où la fonction k appartient à $L^1 \cap L^\infty$.

En ce qui concerne l'unicité, Planchon [PLA] a remarqué qu'une remarque de Brezis [BRE] permettait de relaxer le contrôle au voisinage de $t = 0$:

Théorème F: (Théorème d'unicité de Planchon)

(A) Si $\vec{u}$ est une solution des équations de Navier–Stokes sur $]0,T[\times\mathbb{R}^3$ telle que $\vec{u} \in \mathcal{C}([0,T[,(L^3(\mathbb{R}^3))^3)$ et si de plus pour tous $0 < t_1 < t_2 < T$ on a $\vec{u} \in (L^\infty([t_1,t_2]\times\mathbb{R}^3))^3$, alors $\vec{u} \in (E_{T'})^3$ pour tout $T' < T$.

(B) En particulier, si $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont deux solutions des équations de Navier–Stokes sur $]0,T[\times\mathbb{R}^3$ telles que $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ appartiennent à $\mathcal{C}([0,T[,(L^3(\mathbb{R}^3))^3) \cap_{0<t_1<t_2<T} (L^\infty([t_1,t_2]\times\mathbb{R}^3))^3$ et $\vec{u}_1(0,.) = \vec{u}_2(0,.)$, alors $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$.

L'idée de ce résultat est simple : on part du théorème d'existence de Kato pour montrer que si la donnée initiale reste dans un compact fixe de $(L^3)^3$ on a un contrôle uniforme du temps d'existence de la solution de Kato et de son comportement au voisinage de $t = 0$. On applique ce contrôle pour notre solution $\vec{u}$ à la fonction $\vec{u}(t+\theta)$ de donnée initiale $\vec{u}(\theta)$, $\theta > 0$, pour conclure.

Si l'introduction du contrôle de la norme L^∞ a permis d'obtenir un résultat d'existence de solutions L^3, la question qui restait en suspens était alors de savoir si cette hypothèse a priori sur le comportement de $\vec{u}$ était nécessaire pour obtenir l'unicité des solutions L^3. L'objet du théorème 0 est de montrer l'unicité L^3 sans hypothèse a priori.

2. Navier–Stokes et espaces de Besov.

En 1997,j'ai obtenu avec Furioli et Terraneo [FLT] que l'unicité des solutions L^3 s'obtenait sans autre hypothèse a priori que la continuité $\mathcal{C}([0,T],(L^3)^3)$:

Théorème 1: (Théorème d'unicité de Furioli, PGLR et Terraneo)

(A) L'opérateur A est continu de $L^\infty(]0,T[,L^3) \times L^\infty(]0,T[,L^3)$ dans $L^\infty(]0,T[,\dot{B}_2^{1/2,\infty})$. De plus, A est continu de $L^\infty(]0,T[,L^3) \times L^\infty(]0,T[,\dot{B}_2^{1/2,\infty})$ dans $L^\infty(]0,T[,\dot{B}_2^{1/2,\infty})$ et de $F_T \times L^\infty(]0,T[,\dot{B}_2^{1/2,\infty})$ dans $L^\infty(]0,T[,\dot{B}_2^{1/2,\infty})$ où $F_T = \{u \ / \ \sup_{t<T} t^{1/8}\|u\|_4 < \infty\}$.

(B) En particulier, si $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont deux solutions des équations de Navier–Stokes sur $]0,T[\times \mathbb{R}^3$ telles que $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ appartiennent à $\mathcal{C}([0,T[,(L^3(\mathbb{R}^3))^3)$ et $\vec{u}_1(0,.) = \vec{u}_2(0,.)$, alors $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$.

Notre théorème reposait essentiellement sur deux idées. La première est que l'opérateur B était plus simple à manier dans les espaces de Besov $\dot{B}_q^{s,\infty}$ du fait que la norme s'y calcule essentiellement comme une estimation ponctuelle fréquence par fréquence tandis que la convolution $e^{t\Delta}(-t\Delta)^\alpha$ sélectionne (pour $\alpha > 0$) essentiellement la seule fréquence $1/\sqrt{t}$: c'est particulièrement lumineux dans l'exemple de Le Jan et Sznitman [LJS] qui étudie les solutions dans E^3 où $E = \{f \ / \ |\xi|^2\hat{f}(\xi) \in L^\infty\}$. La seconde était de distinguer dans la solution $\vec{u}$ la *tendance* $e^{t\Delta}\vec{u}_0$ et la *fluctuation* $B(\vec{u},\vec{u})$; Cannone avait montré que pour les solutions de Kato-Weissler la fluctuation est meilleure que la tendance en ce sens qu'elle appartenait à $\mathcal{C}([0,T[,(\dot{B}_3^{0,1})^3)$ et même à $\mathcal{C}([0,T[,(\dot{B}_2^{1/2,1})^3)$ [CAN] (rappelons que l'on a $\dot{B}_2^{1/2,1} \subset \dot{B}_3^{0,1} \subset L^3$); dans le cas d'une seule solution L^3, la fluctuation reste meilleure que la tendance (en norme $\dot{B}_2^{1/2,\infty}$) et cela suffit à faire marcher les calculs.

La preuve du théorème 1 repose alors sur quelques idées simples: d'une part $(u,v) \to \frac{1}{\sqrt{-\Delta}}(uv)$ est continu (d'après les inégalités de Hölder, de Sobolev et de Bernstein) :

de $L^3 \times L^3$ dans $\dot{H}^1_{3/2} \subset \dot{B}_2^{1/2,\infty}$

de $L^3 \times L^p$ dans L^p pour $3/2 < p < \infty$ et de $L^3 \times \dot{H}^1_p$ dans $\dot{H}^1_p$ pour $1 < p < 3$ d'où par interpolation de $L^3 \times \dot{B}_p^{s,q}$ dans $\dot{B}_q^{s,p}$ pour $3/2 < p < 3, 0 < s < 1$ et $1 \leq q \leq \infty$;
de même $(u,v) \to \frac{1}{(\sqrt{-\Delta})^{3/4}}(uv)$ est continu de $L^4 \times \dot{B}_p^{s,q}$ dans $\dot{B}_q^{s,p}$ pour $4/3 < p < 4, 0 < s < 1$ et $1 \leq q \leq \infty$;
d'autre part, les opérateurs $f \to \int_0^t e^{(t-s)\Delta}(t-s)\Delta \ f \ \frac{ds}{t-s}$ et $f \to \int_0^t e^{(t-s)\Delta}(t-s)^{7/8}(-\Delta)^{7/8} \ f \ \frac{ds}{s^{1/8}\ (t-s)^{7/8}}$ opèrent continument dans $L^\infty(\dot{B}_2^{1/2,\infty})$ (ces dernières estimations se démontrant essentiellement fréquence par fréquence).

Remarquons, pour répondre à une question fréquemment posée, que cette démonstration se généralise aux dimensions supérieures et au cas des ouverts à bord (voir [DEP 1] pour une solution L^n sur un domaine extérieur de $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 4$, le cas $n = 3$ se traitant de manière analogue [DEP 2]).

3. Navier–Stokes et espaces de Lorentz.

Peu après notre théorème, Meyer a montré que la distinction entre fluctuation et tendance n'était pas utile si l'on remplaçait l'espace de Besov $\dot B_3^{1/2,\infty}$ par l'espace de Lorentz $L^{3,\infty}$ [MEY].

Théorème 2: (Théorème d'unicité de Meyer)
(A) L'opérateur A est continu de $L^\infty(]0,T[,L^{3,\infty}) \times L^\infty(]0,T[,L^{3,\infty})$ dans $L^\infty(]0,T[,L^{3,\infty})$ et de $F_T \times L^\infty(]0,T[,L^{3,\infty})$ dans $L^\infty(]0,T[,L^{3,\infty})$ où F_T est l'espace $F_T = \{u \ / \ \sup_{t<T} t^{1/8}\|u\|_4 < \infty\}$.
(B) En particulier, si $\vec u_1$ et $\vec u_2$ sont deux solutions des équations de Navier–Stokes sur $]0,T[\times\mathbb{R}^3$ telles que $\vec u_1$ et $\vec u_2$ appartiennent à $\mathcal{C}([0,T[,(L^3(\mathbb{R}^3))^3)$ et $\vec u_1(0,.) = \vec u_2(0,.)$, alors $\vec u_1 = \vec u_2$.

Ce théorème se ramène à l'estimation $\| \int_0^t (t-s)\Delta e^{(t-s)\Delta}\frac{1}{\sqrt{-\Delta}} f(s,x)\ \frac{ds}{(t-s)}\|_{L^\infty(L^{3,\infty})} \le C\|f\|_{L^\infty(L^{3/2,\infty})}$ ou encore par dualité à l'estimation $\int_0^\infty \|s\Delta e^{s\Delta}\frac{1}{\sqrt{-\Delta}} f(x)\|_{L^{3,1}}\ \frac{ds}{s} \le C\|f\|_{L^{3/2,1}}$. Par convexité, il suffit de traiter le cas d'un atome f qui vérifie $\|f\|_\infty \le A^2$ et $\|f\|_1 \le 1/A$ (de sorte que $\|f\|_{L^{3/2,1}} \le 1$) puisque tout élément de $L^{3/2,1}$ s'écrit comme une combinaison linéaire convexe d'atomes $f = \sum \lambda_n f_n, 0 \le \lambda_n, \sum_n \lambda_n = 1$. Or pour un atome cette dernière estimation est évidente grâce aux inégalités de Sobolev

$$\text{pour } \ -1/2 < \alpha < 1/2, \quad \|(-\Delta)^\alpha \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} f\|_{L^{3,1}} \le C_\alpha \|f\|_{\frac{3}{2-2\alpha}}$$

et donc $\|s\Delta e^{s\Delta}\frac{1}{\sqrt{-\Delta}} f(x)\|_{L^{3,1}} \le C_\alpha \frac{s^\alpha}{A^{2\alpha}}$.

4. Retour aux inégalités d'énergie.

Un examen attentif du théorème de Von Wahl (théorème D) montre que la preuve s'étend au cas de deux solutions $\mathcal{C}([0,T),(L^3)^3)$ $\vec u_1$ et $\vec u_2$ dès que $\vec u_1 - \vec u_2$ est dans $L^\infty(]0,T[,(L^2)^3) \cap L^2(]0,T[,(H^1)^3)$. C'est-à-dire dès que la différence des fluctuations est meilleure que la tendance. J'ai proposé dans [LEM 1] en décembre 1997 d'utiliser ceci pour construire des solutions faibles globales pour des données initiales localement L^3. Dans le cas simple d'une donnée initiale L^3, on construit une solution globale de la manière suivante : on fixe ϵ assez petit et on décompose $\vec u_0$ en $\vec v_0 + \vec w_0$ avec $\vec v_0 \in (L^2)^3$, $\|\vec w_0\|_3 < \epsilon$ et $\vec\nabla.\vec v_0 = \vec\nabla.\vec w_0 = 0$; on résout alors Navier–Stokes dans L^3 avec $\vec w_0$ pour donnée initiale, obtenant une solution globale $\vec w$ avec $\sup_{0<t}\|\vec w\|_3 < 2\epsilon$; puis on résout Navier–Stokes avec $\vec u_0$ pour donnée initiale en obtenant une solution de Leray $\vec v + \vec w$ où $\vec v$ appartient à $L^\infty(]0,\infty[,(L^2)^3) \cap L^2(]0,\infty[,(\dot H^1)^3)$ et satisfait l'inégalité d'énergie à la Leray $\|\vec v(t,.)\|_2^2 + 2\int_0^t \|\vec\nabla\otimes\vec v(s,.)\|_2^2\ ds \le \|\vec u_0\|_2^2 + 2\int_0^t \langle\vec\nabla\otimes\vec v|\vec v\otimes\vec w\rangle_{L^2(dx)}\ ds$. Cela donne la relecture suivante du théorème d'unicité en suivant les lignes du théorème de Von Wahl :

Théorème 3: (Théorème d'unicité de PGLR)
(A) Si $\vec u$, $\vec w$ et $\vec v + \vec w$ sont trois solutions faibles des équations de Navier–Stokes sur $]0,T[\times\mathbb{R}^3$, si $\vec u$ et $\vec w$ appartiennent à $\mathcal{C}([0,T),(L^3)^3)$, si $\vec v$ appartient à $L^\infty(]0,T[,(L^2)^3) \cap L^2(]0,T[,(H^1)^3)$ et satisfait l'inégalité d'énergie à la Leray $\|\vec v(t,.)\|_2^2 + 2\int_0^t \|\vec\nabla\otimes\vec v(s,.)\|_2^2\ ds \le \|\vec u_0\|_2^2 + 2\int_0^t \langle\vec\nabla\otimes\vec v|\vec v\otimes\vec w\rangle_{L^2(dx)}\ ds$ pour tout $t \in]0,T[$, si de plus $\vec u$ et $\vec v + \vec w$ ont la même valeur initiale en $t = 0$ alors $\vec u = \vec v + \vec w$.
(B) En particulier, si $\vec u_1$ et $\vec u_2$ sont deux solutions des équations de Navier–Stokes sur $]0,T[\times\mathbb{R}^3$ telles que $\vec u_1$ et $\vec u_2$ appartiennent à $\mathcal{C}([0,T[,(L^3(\mathbb{R}^3))^3)$ et $\vec u_1(0,.) = \vec u_2(0,.)$, alors $\vec u_1 = \vec u_2$.

Pour démontrer ce théorème, il suffit de montrer que pour tout $T' < T$ on a $\vec u - \vec w \in L^\infty(]0,T'[,(L^2)^3) \cap L^2(]0,T'[,(H^1)^3)$. Or $\vec z = \vec u - \vec w$ vérifie $\vec z_0 \in L^2$, $\vec z \in \mathcal{C}([0,T[,(L^3)^3)$ et $\vec z = e^{t\Delta}\vec z_0 - B(\vec z,\vec z) - B(\vec w,\vec z) - B(\vec z,\vec w)$. Cela entraîne $\vec z \in \mathcal{C}([0,T[,(L^2)^3)$. Or par ailleurs la méthode de Leray permet de construire une solution de

$\vec{y} = e^{t\Delta}\vec{z}_0 - B(\vec{z},\vec{y}) - B(\vec{w},\vec{y}) - B(\vec{y},\vec{w})$ avec $\vec{y} \in L^\infty(]0,T'[,(L^2)^3) \cap L^2(]0,T'[,(H^1)^3)$. Il suffit de vérifier que cette dernière équation (*linéaire en* $\vec{y}$) a une unique solution dans $L^\infty(]0,T'[,(L^{2,\infty})^3)$ suivant la méthode du théorème 2 pour conclure.

Remarque: Dans un récent article [LIM], Lions et Masmoudi redémontrent l'unicité L^3 suivant les mêmes lignes, en remplaçant essentiellement l'argument pour montrer que $\vec{u}_1 - \vec{u}_2$ est dans $L^\infty(]0,T[,(L^2)^3) \cap L^2(]0,T[,(H^1)^3)$ par l'étude d'un problème dual. Cette formulation aurait l'avantage de s'appliquer simplement au cas des ouverts à bord, plus simplement que la construction de De Pauw.

5. Inégalités d'énergie locales.

La dernière étape consiste à étendre le théorème de Von Wahl (unicité) ou de Leray (existence) au cas des données localement intégrables, en remplaçant l'inégalité de Leray par celle de Caffarelli, Kohn et Nirenberg. On remplace de même L^3 par l'espace des fonctions localement L^3 et nulles à l'infini : $\lim_{x\to\infty} \int_{|y-x|<1} |f(y)|^3\, dy = 0$. On obtient alors les théorèmes suivants [LEM 2] :

Théorème 4: (Deuxième théorème d'unicité de PGLR)

(A) Soit $\vec{u}_0 \in (E_3(\mathbb{R}^3))^3$ avec $\vec{\nabla}.\vec{u}_0 = 0$. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux solutions faibles des équations de Navier–Stokes sur $]0,T[\times\mathbb{R}^3$ telles que $\vec{u}$ appartient à $\mathcal{C}([0,T[,(E_3)^3)$, $\vec{v}$ appartient à $L^\infty(]0,T[,(E_2)^3)$ et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même valeur initiale $\vec{u}_0$ en $t=0$, si on a de plus $\sup_{x\in\mathbb{R}^3} \int\int_{0<t<T,\ |x-y|\le 1} |\vec{\nabla}\otimes\vec{v}(s,y)|^2\, dy < \infty$ et si $\vec{v}$ est régulière CKN, alors $\vec{u} = \vec{v}$ sur $]0,T[$.

(B) En particulier, si $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont deux solutions des équations de Navier–Stokes sur $]0,T[\times\mathbb{R}^3$ telles que $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ appartiennent à $\mathcal{C}([0,T[,(E_3)^3)$ et $\vec{u}_1(0,.) = \vec{u}_2(0,.)$, alors $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$.

Théorème G: (Théorème d'existence de PGLR)

Soit $\vec{u}_0 \in (E_2)^3$ tel que $\vec{\nabla}.\vec{u}_0 = 0$. Alors il existe une solution $\vec{u} \in \cap_{T<\infty} L^\infty([0,T],(E_2)^3)$ des équations de Navier–Stokes sur $]0,\infty[\times\mathbb{R}^3$ telle que $\lim_{t\to 0^+} \|\vec{u}-\vec{u}_0\|_{E_2} = 0$. De plus, on peut imposer à $\vec{u}$ d'être régulière au sens de Caffarelli, Kohn et Nirenberg.

Le théorème d'unicité et celui d'existence se démontrent conjointement : on commence par montrer l'existence locale d'une solution CKN pour une donnée E_2 ; cette solution $\vec{v}$ est de plus localement $L^2(H^1)$: $\sup_{x\in\mathbb{R}^3} \int\int_{0<t<T,\ |x-y|\le 1} |\vec{\nabla}\otimes\vec{v}(s,y)|^2\, dy < \infty$. Le théorème d'unicité s'en déduit selon les mêmes lignes que le théorème 3 : on commence par montrer l'unicité E_2 des solutions de $\partial_t\vec{z} = \Delta\vec{z} - \mathbb{P}\vec{\nabla}.\vec{u}\otimes\vec{z}$ lorsque $\vec{u} \in \mathcal{C}([0,T[,(E_3)^3)$ (à l'aide d'espaces de Besov sur les Morrey–Campanato), ce qui permet de montrer que $\vec{u}$ est localement $L^2(H^1)$. La fin de la démonstration de l'existence vient de ce que presque partout en temps la solution locale construite est E_3 et que pour les solutions E_3 on sait construire des solutions CKN $L^2 + E_3$ par la méthode de Leray sur des intervalles de temps arbitrairement longs; pour construire des solutions globales, il reste à construire des solutions sur des intervalles $]t_n, t_{n+1}+\epsilon_n[$ avec $\epsilon_n > 0$ et $t_{n+1} - t_n > 1$ et à les recoller régulièrement CKN par le théorème d'unicité.

Le plus délicat est le maniement de l'inégalité d'énergie locale pour obtenir l'existence d'une solution E_2. L'idée est de tronquer $\vec{u}_0$ pour obtenir une donnée initiale L^2; on utilise pour cela une base d'ondelettes vecteurs à divergence nulle qui nous permet facilement d'approximer dans $(E_2)^3$ $\vec{u}_0$ par une suite de champs L^2 à divergence nulle. Pour une donnée L^2, on sait construire une solution de Leray CKN. Il reste essentiellement à montrer que l'on contrôle la norme E_2 des solutions par la seule norme E_2 des données, pour pouvoir ensuite passer à la limite. Or on a pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$:

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{c} \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{u}(t,x)|^2\ \ \varphi(x)\, dx + 2\int\int_0^t |\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2\, \varphi\, dx\, ds \le \\ \le \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{u}_0(x)|^2\ \ \varphi(x)\, dx + \int\int_0^t |\vec{u}|^2\, \Delta\varphi\, dx\, dt + \int\int_0^t (|\vec{u}|^2 + 2p)(\vec{u}.\vec{\nabla})\varphi\ \ dx\, dt \end{array} \right.$$

On applique cette inégalité à l'estimation de $\alpha(t) = \sup_{x\in\mathbb{R}^3} \int_{|x-y|<1} |\vec u(t,y)|^2\ dy$ et à $\beta(t) = \sup_{x\in\mathbb{R}^3} \int\int_{|x-y|<1, 0<s<t} |\vec\nabla\otimes\vec u(s,y)|^2\ dy\ ds$ en considérant φ_0 qui vaut 1 sur $B(0,1)$ et x_t, y_t tels que: $\alpha(t) \le \int_{\mathbb{R}^3} |\vec u(t,x)|^2\ \ \varphi_0(x-x_t)\ dx$ et $\beta(t) \le \int\int_0^t |\vec\nabla\otimes\vec u|^2\ \varphi_0(x-y_t)\ dx\ ds$; on obtient alors :

$$\alpha(t) \le \alpha(0) + C_1 \int_0^t \alpha(s)\ ds + C_2\ (\int_0^t \alpha(s)^3\ ds)^{1/4}(\beta(t) + \int_0^t \alpha(s)\ ds)^{3/4}$$

$$2\beta(t) \le \alpha(0) + C_1 \int_0^t \alpha(s)\ ds + C_2\ (\int_0^t \alpha(s)^3\ ds)^{1/4}(\beta(t) + \int_0^t \alpha(s)\ ds)^{3/4}$$

On peut éliminer $\beta(t)$ et obtenir finalement : $\alpha(t) \le C_0\ (\alpha(0) + \int_0^t \alpha(s)\ ds + \int_0^t \alpha(s)^3\ ds)$ et en fin de compte un contrôle local de α et de β en fonction de la seule taille de $\alpha(0)$.

6. Régularité des solutions L^3.

Tout récemment, je me suis aperçu que les résultats de la section précédente impliquaient en fait la régularité des solutions L^3 ou E_3 et que les solutions $\mathcal{C}([0,T[,(L^3)^3)$ vérifiaient toujours la condition de Kato et Weissler sur la norme L^∞ :

Théorème 5: (Troisième théorème d'unicité de PGLR)
(A) Si $\vec u$ est une solution faible des équations de Navier–Stokes sur $]0,T[\times\mathbb{R}^3$ telle que $\vec u$ appartient à $\mathcal{C}([0,T[,(E_3)^3)$, alors $\vec u$ est régulière CKN et de plus on a pour tout $t\in]0,T[$ $\sup_{0<s<t}\sqrt{s}\ \|\vec u\|_\infty < \infty$.
(B) En particulier, si $\vec u_1$ et $\vec u_2$ sont deux solutions des équations de Navier–Stokes sur $]0,T[\times\mathbb{R}^3$ telles que $\vec u_1$ et $\vec u_2$ appartiennent à $\mathcal{C}([0,T[,(E_3)^3)$ et $\vec u_1(0,.) = \vec u_2(0,.)$, alors $\vec u_1 = \vec u_2$.
(C) Si $\vec u$ est une solution faible des équations de Navier–Stokes sur $]0,\infty[\times\mathbb{R}^3$ telle que $\vec u$ appartient à $\mathcal{C}([0,\infty[,(L^3)^3)$, alors on a $\lim_{t\to\infty}\|\vec u\|_3 = 0$ et donc $\sup_{0<t}\sqrt{t}\ \|\vec u\|_\infty < \infty$ et $\lim_{t\to\infty}\sqrt{t}\ \|\vec u\|_\infty = 0$.

Pour le point (A), il suffit de remarquer que le théorème d'existence globale de solutions régulières CKN (théorème G) et le théorème d'unicité à la Von Wahl pour les solutions E_3 (théorème 4) montrent que $\vec u$ est régulière CKN; par ailleurs si $t<T$, on a par compacité de $\{\vec u(s)\ /\ 0\le s\le t\}$ dans $(E_3)^3$ que $\lim_{\delta\to 0}\sup_{x_0\in\mathbb{R}^3, 0\le s\le t}\int_{|x-x_0|<\delta}|\vec u(s,x)|^3 + |p(s,x)-p_{s,x_0}|^{3/2}\ dx = 0$ de sorte que pour δ assez petit on a pour tout $x_0\in\mathbb{R}^3$ et tout $\theta\in[\delta^2,t]$ l'inégalité $\int\int_{|x-x_0|<\delta,\theta-\delta^2<s<\theta}|\vec u|^3 + |p-p_{x_0,\theta}|^{3/2}\ dx\ ds < \epsilon_1\ \delta^2$ et finalement, d'après le critère de Caffarelli, Kohn et Nirenberg (théorème B), $\sup_{3\delta^2/4\le s\le t}\|\vec u\|_\infty < C_1\ \delta^{-1}$. Cela donne en fixant δ_0 le contrôle de la norme L^∞ sur $[\delta_0^2,t]$; pour $s<\delta_0^2$, on prend $\delta=\sqrt{s}$ et on obtient le contrôle de $\sqrt{s}\ \|\vec u\|_\infty$.

Le point (B) (qu'en fait nous avons déjà utilisé dans la démonstration du point (A)!, de sorte qu'il ne s'agit pas ici de le redémontrer mais seulement de le réinterpréter) devient alors évident, puisque l'unicité des solutions de Kato–Weissler se déduit immédiatement des propriétés de contractivité de l'opérateur B.

Pour le point (C), on remonte au théorème 3. Si ϵ est assez petit et si on décompose $\vec u_0$ en $\vec v_0+\vec w_0$ avec $\vec v_0\in(L^2)^3$, $\|\vec w_0\|_3<\epsilon$ et $\vec\nabla.\vec v_0 = \vec\nabla.\vec w_0 = 0$, on résout Navier–Stokes dans L^3 avec $\vec w_0$ pour donnée initiale, obtenant une solution $\vec w$ avec $\sup_{0<t}\|\vec w\|_3 < 2\epsilon$; puis on résout Navier–Stokes avec $\vec u_0$ pour donnée initiale en obtenant une solution de Leray $\vec v+\vec w$ où $\vec v$ appartient à $L^\infty(]0,\infty[,(L^2)^3)\cap L^2(]0,\infty[,(\dot H^1)^3)$ et satisfait l'inégalité d'énergie à la Leray $\|\vec v(t,.)\|_2^2 + 2\int_0^t\|\vec\nabla\otimes\vec v(s,.)\|_2^2\ ds \le \|\vec u_0\|_2^2 + 2\int_0^t \langle\vec\nabla\otimes\vec v|\vec v\otimes\vec w\rangle_{L^2(dx)}\ ds$. En particulier, $\vec v\in L^4(]0,\infty[,(L^3)^3)$ et donc $\|\vec v\|_3<\epsilon$ en dehors d'un ensemble de temps de mesure finie. On obtient donc que $\vec u$ finit par être petit en norme L^3 et le reste alors grâce au théorème de Kato sur les solutions globales L^3.

Bibliographie.

[BRE] BREZIS, H., Remarks on the preceding paper by M.Ben–Artzi "Global solutions of two–dimensional Navier–Stokes and Euler equations.", *Arch. Rat. Mech. Anal.* 128 (1994), pp. 359–360.

[CAN] CANNONE, M., *Ondelettes, paraproduits et Navier-Stokes* , Diderot Editeur, Paris, 1995.

[CKN] CAFFARELLI, L., KOHN, R., & NIRENBERG, L., Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations, *Comm. Pure Appl. Math.* 35 (1982), pp. 771-831.

[CHE] CHEMIN, J.Y., Théorèmes d'unicité pour le système de Navier–Stokes tridimensionnel, à paraître in *J. Anal. Math.*.

[DEP 1] DE PAUW, N., *Solutions peu régulières des équations d'Euler et Navier–Stokes sur un domaine à bord.* Thèse, PARIS XIII (1998).

[DEP 2] DE PAUW, N., Communication personnelle, 1998.

[FUK] FUJITA, H. & KATO, T., On the Navier-Stokes initial value problem, I, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 16 (1964), pp. 269-315.

[FLT] FURIOLI, G., LEMARIÉ-RIEUSSET, P.G. & TERRANEO, E., Unicité dans $L^3(\mathbb{R}^3)$ et d'autres espaces limites pour Navier-Stokes, à paraître in *Revista Mat. Iberoamer.*.

[KAT] KATO, T., Strong L^p solutions of the Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^m$ with applications to weak solutions, *Math. Zeit.* 187 (1984), pp. 471-480.

[LJS] LE JAN, Y. & SZNITMAN, A. S., Cascades aléatoires et équations de Navier-Stokes, *C. R. Acad. Sci. Paris* 324 Série I (1997), pp. 823-826.

[LEM 1] LEMARIÉ-RIEUSSET, P.G., Quelques remarques sur les équations de Navier-Stokes dans $\mathbb{R}^3$, Séminaire X-EDP, 1997-1998.

[LEM 2] LEMARIÉ-RIEUSSET, P.G., Weak infinite-energy solutions for the Navier–Stokes equations in $\mathbb{R}^3$, en préparation.

[LER] LERAY, J., Essai sur le mouvement d'un fluide visqueux emplissant l'espace, *Acta Math.* 63 (1934), pp. 193-248.

[LIM] LIONS, P.L. & MASMOUDI, N., Unicité des solutions faibles de Navier–Stokes dans $L^N(\Omega)$, *C. R. Acad. Sci. Paris* 327 Série I (1998), pp. 491-496.

[MEY] MEYER, Y. , *Wavelets, paraproducts and Navier-Stokes equations*, à paraître comme *Memoir of the AMS.*

[ORU] F.ORU, *Rôle des oscillations dans quelques problèmes d'analyse non linéaire.* Thèse, École Normale Supérieure de Cachan (1998).

[PLA] PLANCHON, F., *Solutions globales et comportement asymptotique pour les équations de Navier-Stokes*, Thèse, Ecole Polytechnique, 1996.

[SCH] SCHEFFER, V., Hausdorff measure and the Navier-Stokes equations, *Comm. Math. Phys.* 55 (1977), pp. 97-112.

[SER] SERRIN, J., On the interior regularity of weak solutions of the Navier-Stokes equations, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 9 (1962), pp. 187-195.

[WAH] VON WAHL, W., *The equations of Navier-Stokes and abstract parabolic equations.* Vieweg & Sohn, Wiesbaden, 1985.

[WEI] WEISSLER, F., The Navier–Stokes initial value problem in L^p, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 74 (1980), pp. 219-230.