

Contents

1	INTRODUCTION	3
2	DUALITE CALL-PUT	10
2.1	Calls et puts markoviens et martingaliens.	10
2.1.1	Définitions.	10
2.1.2	Dépendance en les paramètres.	12
2.2	Calls et puts convexes.	18
2.3	Convexité et dualité call-put.	20
2.3.1	Un espace de Banach naturel.	20
2.3.2	Semi-groupe call-put dual.	21
2.4	Propriétés de la dualité call-put.	23
2.5	Semi-groupe mesure et dualité call-put.	25
3	CONTINUITÉ DU SEMI-GROUPE	32
3.1	Limite des calls en zéro.	32
3.2	Cas non continu.	34
4	GENERATEUR INFINITESIMAL	39
4.1	Rappels.	40
4.2	Construction de \hat{A} à partir de A	42
4.3	Théorème de caractérisation.	50
4.4	Une décomposition type Lévy-Kintchine.	53

4.5	Cas des générateurs bornés.	56
5	EXEMPLES ET APPLICATIONS	60
5.1	Cas des semi-groupes de convolution.	60
5.2	Un exemple à temps discret.	63
5.3	Le cas des diffusions.	66
5.3.1	Rappels.	66
5.3.2	Symétrie du semi-groupe.	71
5.3.3	Egalité de Q et \hat{Q}	71
5.3.4	Approche infinitésimale.	75
5.4	Un exemple à générateur borné.	80

Chapter 1

INTRODUCTION

La question de la propagation de la convexité apparaît naturellement en mathématiques financières, plus précisément dans le domaine du pricing d'options.

On va tenter de l'expliquer sur un exemple. Le but est d'exposer aussi brièvement que possible l'origine du problème à un lecteur non familier avec les mathématiques financières, et on ne prétend pas à une introduction à la théorie générale du pricing d'options.

L'e.d.s.

$$\begin{cases} S_0 > 0 \\ dS_t = \sigma(S_t, t) S_t dB_t + \mu(S_t, t) S_t dt \end{cases} \quad (1.1)$$

où σ est bornée, loin de zéro, modélise typiquement la dynamique d'une action ("stock", d'où le S). On dit que σ est la "volatilité" de S .

Un "call (resp. put) sur S de maturité T et de strike K " est le droit d'acheter (resp. vendre) l'action S au prix fixé à l'avance K à la date T dans le futur. Calls et puts sont les exemples canoniques d'options. Le problème générique du pricing d'options est d'évaluer la valeur de ce droit aujourd'hui, disons à la date 0.

A l'instant T , le call vaut clairement $\text{Max}(S_T - K, 0) = (S_T - K)^+$. Le put vaut $(K - S_T)^+$.

Soit une probabilité P^* sous laquelle S soit une martingale ayant la propriété de

représentation prévisible. Il existe alors un processus Δ adapté à la filtration naturelle F de S tel que

$$(S_T - K)^+ = E^{P^*} [(S_T - K)^+ | F_T] = E^{P^*} [(S_T - K)^+ | F_0] + \int_0^T \Delta_t dS_t \quad (1.2)$$

La remarque cruciale est que (pour simplifier on suppose les taux d'intérêts nuls) $\int_0^T \Delta_t dS_t$ représente un flux financier: considérons un intervenant qui achète Δ_0 actions à l'instant 0 (au cours S_0), les revend à l'instant h (au cours S_h), en rachète Δ_h à l'instant h , les revend à l'instant $2h$, etc...jusqu'à l'instant $(N-1)h$. Il a finalement en trésorerie la somme

$$\sum_{k=0}^{N-1} \Delta_{kh} (S_{(k+1)h} - S_{kh})$$

En prenant $h = \frac{T}{N}$ on a à la limite $N \rightarrow \infty$ l'intégrale stochastique $\int_0^T \Delta_t dS_t$.

Si le même intervenant vend de plus le call à l'instant 0 au prix $E^{P^*} [(S_T - K)^+ | F_0]$, il a exactement en trésorerie à l'instant T la somme $E^{P^*} [(S_T - K)^+ | F_0] + \int_0^T \Delta_t dS_t$ qui vaut $(S_T - K)^+$ d'après (1.2). Mais c'est exactement l'argent que va lui réclamer l'acheteur du call à l'instant 0, et pour des raisons claires d'absence d'opportunité d'arbitrage la quantité $E^{P^*} [(S_T - K)^+ | F_0]$ est le "juste prix" de l'option. On dit qu'il y a "réplication parfaite".

Ce raisonnement (dans cet univers simplifié idéal) est valable en toute généralité. Sous de bonnes hypothèses, il y a existence et unicité de P^* . L' "opérateur"

$$f \mapsto E^{P^*} [f(S_T) | F_0]$$

est positif et martingalien (ie $E^{P^*} [S_T | F_0] = S_0$). Si l'on travaille avec des modèles où S n'atteint pas 0 ou l'infini en un temps fini, il opère sur des fonctions de R_+^* .

Dans notre modèle, P^* est l'unique probabilité sous laquelle

$$dS_t = \sigma(S_t, t) S_t dB_t^*$$

où B^* est un P^* -mouvement brownien (B^* et P^* dépendent de μ , mais pas la loi de B^* sous P^*).

S est un processus de Markov, et

$$E^{P^*} [f(S_T) | F_0] = E^{P^*} [f(S_T) | S_0]$$

Notre opérateur est bien défini et transforme des fonctions de R_+^* en fonctions de R_+^* .

On a de plus un semi-groupe de tels opérateurs.

Le cadre se clarifie donc un peu. Reste à voir où intervient la propagation de la convexité.

Si l'on note

$$C(x, t) = E^{P^*} [(S_T - K)^+ | S_t = x]$$

on montre via la formule d'Ito

$$\Delta_t = \frac{\partial C(S_t, t)}{\partial x}$$

et

$$\frac{1}{2} \sigma^2(x, t) x^2 \frac{\partial^2 C(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial C(x, t)}{\partial t} = 0$$

Posons-nous maintenant la question suivante: supposons que notre intervenant se trompe (ce qui est bien entendu le cas général) dans son anticipation de la volatilité $\sigma(S_t, t)$; c'est à dire qu'il évalue C et Δ sous l'hypothèse

$$dS_t = \sigma(S_t, t) S_t dB_t + \mu(S_t, t) S_t dt$$

(comme on l'a vu l'anticipation de μ n'a pas d'importance) alors que la réalité obéit à

$$dS_t = \tau_t S_t dB_t + \nu_t S_t dt$$

où τ et ν sont des processus adaptés au passé de S .

Quelle est sa trésorerie finale ("Profit&Loss" ou P&L) après avoir payé $(S_T - K)^+$ au détenteur du call ?

Avec des notations ad hoc

$$P\&L = C^\sigma(S_0, 0) + \int_0^T \Delta_t^\sigma dS_t^{\tau, \nu} - (S_T^{\tau, \nu} - K)^+$$

Un peu de calcul d'Ito permet d'aboutir à l'expression

$$P\&L = \frac{1}{2} \int_0^T \frac{\partial^2 C^\sigma(S_t^{\tau, \nu}, t)}{\partial x^2} (S_t^{\tau, \nu})^2 (\sigma^2(S_t^{\tau, \nu}, t) - \tau_t^2) dt$$

d'où l'on tire la règle pratique suivante: si $\frac{\partial^2 C^\sigma(\cdot, \cdot)}{\partial x^2} \geq 0$ (ce qui est vrai pour $t = T$ au moins) et $\tau_t^2 \leq \sigma^2(S_t^{\tau, \nu}, t)$ sur la trajectoire qui se réalise alors $P\&L \geq 0$.

Il suffit donc d'anticiper correctement un majorant (resp. minorant) de la volatilité réelle pour vendre (resp. acheter) un call sans risque (nonobstant tout le reste..), dès que la convexité se propage.

On voit donc l'intérêt de la propagation de la convexité dans la modélisation (1.1). C'est en gros le seul modèle markovien à répliation parfaite et à trajectoires continues. En fait la propagation de la convexité peut s'obtenir facilement, et il n'y a pas là de véritable question.

On peut maintenant partir dans 2 directions:

La première direction consiste à conserver l'hypothèse markovienne. P^* désigne

alors simplement une probabilité sous laquelle S est une martingale. Dans un cadre markovien général le lien avec les mathématiques financières est beaucoup moins clair: $E^{P^*} [f(S_T) | S_0]$ n'a pas de raison d'être un "juste prix", et d'ailleurs P^* a peu de chances d'être unique...

Le problème auquel on s'attaque est de ce point de vue "périphérique", et les mathématiques financières apparaissent simplement comme le creuset d'origine de la question.

Notons tout de même que $E^{P^*} [f(S_T) | S_0]$ peut récupérer sa signification de prix d'option dans une approche fondée non plus sur l'absence d'opportunité d'arbitrage mais sur une théorie d' "équilibre général" (P^* a alors une légitimation économique). Il peut être intéressant de disposer de la convexité de $x \mapsto C(x, t)$. La première partie est consacrée à cette étude des semi-groupes markoviens et martingaliens de R_+^* qui propagent la convexité..

Dans le chapitre 2, on montre qu'un semi-groupe Q d'opérateurs positifs, markoviens et martingaliens propage la convexité si et seulement si il existe un semi-groupe \hat{Q} de la même famille tel que

$$\forall (x, y) \in R_+^{*2}, 0 < t$$

$$Q_t(\cdot - y)^+ [x] = \hat{Q}_t(x - \cdot)^+ [y]$$

On baptise \hat{Q} semi-groupe "call-put dual" de Q . On montre aussi qu'il y a identité entre les semi-groupes positifs, markoviens et martingaliens qui propagent la convexité et les semi-groupes vérifiant les mêmes propriétés définis sur le Banach

$$G = \left\{ g \in C^0(R^{*+}) / \exists K, L \frac{g(x)}{x} \rightarrow K \text{ quand } x \rightarrow \infty, g(x) \rightarrow L \text{ quand } x \rightarrow 0^+ \right\}$$

avec

$$\|g\|_G = \sup \frac{|g(x)|}{1+x}$$

Ceci est très commode, car un opérateur positif, markovien et martingalien de G est une contraction positive, et l'on peut du coup étudier la propagation de la convexité dans le

cadre des semi-groupes de contractions positives sur un espace de Banach.

Dans le chapitre 3, on montre qu'un semi-groupe qui propage "vraiment" la convexité est nécessairement continu (au sens de G).

On caractérise les générateurs infinitésimaux des semi-groupes positifs, markoviens et martingaliens de G qui propagent la convexité dans le chapitre 4. On donne en particulier une formule type Lévy-Kintchine et la forme explicite des générateurs bornés.

Le dernier chapitre est consacré aux exemples. On étudie en détail le cas de la diffusion homogène; on montre sans aucune hypothèse sur la régularité de σ l'égalité entre Q et \hat{Q} . On en déduit le résultat de régularité suivant: si σ est continue, les fonctions

$$x \mapsto Q_t(\cdot - y)^+[x]$$

sont C^1 pour $t > 0$.

La seconde direction est de se demander ce qu'il advient dans un modèle à réplication parfaite et à trajectoires continues non markovien où un calcul analogue à celui qu'on a esquissé pour la diffusion markovienne est possible. Le problème est évoqué dans [EKJP]. On s'attaque dans la seconde partie au modèle

$$\begin{cases} S_0 > 0 \\ dS_t = \sigma(A_t, S_t) S_t dB_t \\ dA_t = f(S_t) dt \end{cases} \quad (1.3)$$

Ce modèle, comme on explique dans le chapitre 1, est le plus naturel pour lequel la question de la propagation de la convexité se pose.

On se restreint au cas où f garde un signe constant (on se ramène à $f \geq 0$), on précise les hypothèses sur σ et f au chapitre 2. Sous des hypothèses de régularité plus fortes, une simple dérivation de l'E.D.P. associée à (1.3) permet de montrer la propagation de la convexité lorsque σ est décroissante (chapitre 3). Une astuce de calcul basée sur la remarque qu'on peut faire jouer à A le rôle d'un temps permet de retrouver ce résultat

avec les hypothèses du chapitre 2, et aussi de traiter le cas σ croissant. On obtient dans ce cas un critère analytique très simple de propagation de la convexité (Proposition 3), et aussi un exemple où la convexité ne se propage pas.

Une conséquence de la propagation de la convexité est la croissance de

$$\sigma \mapsto E[\varphi(S_t^\sigma)]$$

pour φ convexe, où S^σ est la solution de (1.3) pour un coefficient de diffusion σ . Si la convexité ne se propage pas, on peut espérer exhiber une configuration où cette croissance est prise en défaut. Le chapitre 5 est consacré à la construction d'une telle configuration.

Chapter 2

DUALITE CALL-PUT

2.1 Calls et puts markoviens et martingaliens.

2.1.1 Définitions.

Soit F l'e.v. engendré par les fonctions de R_*^+ dans R^+ $x \mapsto (x - y)^+$ et $x \mapsto (y - x)^+$ où y décrit R_*^+ . A cause de la relation $(x - y)^+ - (y - x)^+ = x - y$, F contient les constantes et l'identité. F est en fait exactement l'e.v. des fonctions de R_*^+ affines par morceaux.

On s'intéresse à des semi-groupes Q sur n'importe quel e.v. de fonctions partout définies qui contienne F , et tel que Q soit markovien ($Q1 = 1$), "martingalien" ($QId = Id$) et positif. Plus précisément, on dit que le semi-groupe Q vérifie $(H0)$ si et seulement si:

- $(H0)$

Il existe un e.v. de fonctions partout définies qui contienne F , sur lequel Q est un semi-groupe markovien, martingalien, et positif.

On note $(H0)'$ l'hypothèse plus forte:

- $(H0)'$

Q est associé à un semi-groupe de noyaux de probabilités sur R_*^+ muni de sa tribu borélienne usuelle, ie à une famille de mesure positives $q(x, dy; s, t), x \in$

R_+^* vérifiant:

$$\forall u > t > s \geq 0, \forall x \in R_+^*$$

$$(i) \int q(x, dy; s, t) = 1$$

$$(ii) \int q(x, dy; s, t) y = x$$

(iii) $\forall f$ mesurable positive $z \mapsto \int q(z, dy; s, t) f(y)$ est mesurable.

(iv) $q(x, dz; s, u) = \int q(x, dy; s, t) q(y, dz; t, u)$ (égalité au sens mesures).

Remarque 1 Il y a 2 propriétés en plus par rapport à (H0) : l'existence de noyaux mesures, c'est à dire une hypothèse de continuité des opérateurs du semi-groupe, et le fait qu'on se confine à R_+^* , excluant des masses en 0 et en $+\infty$.

Dans toute la suite, on suppose (H0).

On définit des fonctions "calls" et "puts", qu'on indice par le semi-groupe, respectivement par:

$$\forall (x, y) \in R_+^{*2}, 0 \leq s < t$$

$$C_Q(x, y; s, t) = Q_{s,t}(\cdot - y)^+[x]$$

$$P_Q(x, y; s, t) = Q_{s,t}(y - \cdot)^+[x]$$

Remarquons tout d'abord que la fermeture de F^+ pour la convergence monotone contient $C^0(R_+^*)^+$. Par conséquent, 2 mesures de probabilité sur R_+^* qui coïncident sur F sont égales.

Proposition 1 Sous (H0)', Q est entièrement déterminé par (toutes) les fonctions calls ou (toutes) les fonctions puts.

Definition 1 Soit Q vérifiant (H0). On dira dans la suite que Q vérifie (H0)' si et seulement si il existe un semi-groupe R (donc nécessairement unique) vérifiant (H0)' tel que

$$\forall (x, y) \in R_+^{*2}, 0 \leq s < t \quad C_Q(x, y; s, t) = C_R(x, y; s, t)$$

2.1.2 Dépendance en les paramètres.

On a à cause des hypothèses Markov et martingale:

$$0 \leq C_Q(x, y; s, t) \leq x \quad (2.1)$$

$$0 \leq P_Q(x, y; s, t) \leq y$$

et

$$C_Q(x, y; s, t) - P_Q(x, y; s, t) = x - y$$

(relation de "parité call-put").

Dépendance en s, t .

Observons que $(x - y)^+ = \sup(x - y, 0)$, d'où à cause de la positivité de Q :

$$\begin{aligned} & C_Q(x, y; t, u) \\ &= Q_{t,u}(\cdot - y)^+[x] \\ &\geq \sup(Q_{t,u}(\cdot - y)[x], 0) \\ &= \sup(x - y, 0) \\ &= (x - y)^+ \end{aligned}$$

Par action de $Q_{s,t}$:

$$\forall 0 < s < t \leq u \quad C_Q(x, y; s, u) \geq C_Q(x, y; s, t) \quad (2.2)$$

Dépendance en y .

À cause de la convexité et de la décroissance de $y \mapsto (x - y)^+$ et de la positivité du semi-groupe $y \mapsto C_Q(x, y; s, t)$ est convexe décroissante.

On a à cause de (2.1) et (2.2)

$$\lim_{y \downarrow 0^+} C_Q(x, y; s, t) = x$$

Et puisque $C_Q(x, y; s, t) \geq 0$

$$\exists \lim_{y \uparrow \infty} C_Q(x, y; t, u)$$

A cause de $\left| (x - z)^+ - (x - y)^+ \right| \leq |z - y|$ et des hypothèses de markoviannité et de positivité, $y \mapsto C_Q(x, y; s, t)$ est de plus lipschitzienne de rapport 1. La dérivée à droite $\frac{\partial_d C_Q}{\partial y}$ est négative croissante, comprise entre -1 et 0 , et

$$\exists \lim_{y \uparrow \infty} \frac{\partial_d C_Q}{\partial y}(x, y; t, u), \exists \lim_{y \downarrow 0^+} \frac{\partial_d C_Q}{\partial y}(x, y; t, u) \quad (2.3)$$

A cause de $C_Q(x, y; s, t) \geq 0$

$$\lim_{y \uparrow \infty} \frac{\partial_d C_Q}{\partial y}(x, y; t, u) = 0$$

Par parité call-put

$$\begin{aligned} \lim_{y \downarrow 0^+} P_Q(x, y; s, t) &= 0 \\ \frac{\partial_d P_Q}{\partial y}(x, y; t, u) &= \frac{\partial_d C_Q}{\partial y}(x, y; t, u) + 1 \end{aligned}$$

d'où $0 \leq \frac{\partial_d P_Q}{\partial y}(x, y; t, u) \leq 1$ et la fonction $y \mapsto y \frac{\partial_d P_Q}{\partial y}(x, y; t, u) - P_Q(x, y; s, t)$ est croissante, majorée par $y - P_Q(x, y; s, t) = x - C_Q(x, y; s, t)$ et donc par x , d'où

$$\exists \lim_{y \uparrow \infty} y \frac{\partial_d P_Q}{\partial y}(x, y; t, u) - P_Q(x, y; s, t) \leq x$$

Lemme 2 $\forall x \in R_+^*, 0 \leq s < t$ la fonction

$$y \mapsto P_Q(x, y; s, t)$$

est croissante convexe positive, lipschitzienne de rapport 1 et

$$\begin{aligned}
\lim_{y \downarrow 0^+} P_Q(x, y; s, t) &= 0 \\
\lim_{y \uparrow \infty} \frac{\partial_d P_Q}{\partial y}(x, y; t, u) &= 1 \\
\lim_{y \downarrow 0^+} \frac{\partial_d P_Q}{\partial y}(x, y; t, u) &\geq 0 \\
\lim_{y \uparrow \infty} y \frac{\partial_d P_Q}{\partial y}(x, y; t, u) - P_Q(x, y; s, t) &\leq x
\end{aligned}$$

On note dorénavant

$$\begin{aligned}
Q(x, 0; s, t) &= \lim_{z \downarrow 0^+} \frac{\partial_d P_Q}{\partial z}(x, z; s, t) \\
Q(x, \infty; s, t) &= x - \lim_{z \uparrow \infty} \left(z \frac{\partial_d P_Q}{\partial y}(x, z; s, t) - P_Q(x, z; s, t) \right) \\
Q(x, dz; s, t) &= \frac{\partial^2 P_Q}{\partial z^2}(x, dz; s, t)
\end{aligned}$$

considéré (au sens des distributions sur R_+^*) comme mesure sur R_+^* . On a

$$\begin{aligned}
0 &\leq Q(x, 0; s, t) \leq 1 \\
0 &\leq Q(x, \infty; s, t) \leq x \\
\int Q(x, dz; s, t) &\leq 1 \\
\int z Q(x, dz; s, t) &\leq x \\
Q(x, 0; s, t) + \int Q(x, dz; s, t) &= 1 \\
\int z Q(x, dz; s, t) + Q(x, \infty; s, t) &= x
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Le lemme suivant relie les fonctions calls et puts à leur "valeur initiale".

Lemme 3

$$\begin{aligned}
P_Q(x, y; s, t) &= y Q(x, 0; s, t) + \int (y - z)^+ Q(x, dz; s, t) \\
C_Q(x, y; s, t) &= Q(x, \infty; s, t) + \int (z - y)^+ Q(x, dz; s, t)
\end{aligned}$$

▷ En effet

$$\begin{aligned} & \int_{a^+}^{b^+} \frac{\partial^2 P_Q}{\partial y^2} (x, dy; s, t) \\ &= \frac{\partial_a P_Q}{\partial y} (x, b; s, t) - \frac{\partial_a P_Q}{\partial y} (x, a; s, t) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \int_{a^+}^{b^+} y \frac{\partial^2 P_Q}{\partial y^2} (x, dy; s, t) \\ &= \left[b \frac{\partial_a P_Q}{\partial y} (x, b; s, t) - P_Q (x, b; s, t) \right] - \left[a \frac{\partial_a P_Q}{\partial y} (x, a; s, t) - P_Q (x, a; s, t) \right] \end{aligned}$$

En faisant $a = 0$ et $b = y$ on en déduit

$$\begin{aligned} & \int (y - z)^+ \frac{\partial^2 P_Q}{\partial z^2} (x, dz; s, t) \\ &= \int^y (y - z) \frac{\partial^2 P_Q}{\partial z^2} (x, dz; s, t) \\ &= \int^{y^+} (y - z) \frac{\partial^2 P_Q}{\partial z^2} (x, dz; s, t) \\ &= y \int_{0^+}^{y^+} \frac{\partial^2 P_Q}{\partial z^2} (x, dz; s, t) - \int_{0^+}^{y^+} z \frac{\partial^2 P_Q}{\partial z^2} (x, dz; s, t) \\ &= y \left[\frac{\partial_a P_Q}{\partial y} (x, y; s, t) - \lim_{y \downarrow 0^+} \frac{\partial_a P_Q}{\partial y} (x, y; t, u) \right] \\ &\quad - \left[y \frac{\partial_a P_Q}{\partial y} (x, y; s, t) - P_Q (x, y; s, t) - 0 \right] \end{aligned}$$

D'où la première assertion.

De même avec $a = y$ et $b = +\infty$

$$\begin{aligned} & \int (z - y)^+ \frac{\partial^2 P_Q}{\partial z^2} (x, dz; s, t) \\ &= \int_{y^+} (z - y) \frac{\partial^2 P_Q}{\partial z^2} (x, dz; s, t) \\ &= \int_{y^+} z \frac{\partial^2 P_Q}{\partial z^2} (x, dz; s, t) - y \int_{y^+} \frac{\partial^2 P_Q}{\partial z^2} (x, dz; s, t) \\ &= \left[\lim_{z \uparrow \infty} z \frac{\partial_a P_Q}{\partial y} (x, z; s, t) - P_Q (x, z; s, t) \right] \\ &\quad - \left[y \frac{\partial_a P_Q}{\partial y} (x, y; s, t) - P_Q (x, y; s, t) \right] - y \left[1 - \frac{\partial_a P_Q}{\partial y} (x, y; s, t) \right] \\ &= \left[\lim_{z \uparrow \infty} z \frac{\partial_a P_Q}{\partial y} (x, z; s, t) - P_Q (x, z; s, t) \right] - x \\ &\quad + x - y - P_Q (x, y; s, t) \end{aligned}$$

D'où la seconde assertion, par parité call-put. ◁

On notera (*Bords*) la propriété:

- (*Bords*)

$\forall x \in R_+^*, 0 \leq s < t$

$$\begin{cases} Q(x, 0; s, t) = 0 \\ Q(x, \infty; s, t) = 0 \end{cases}$$

Proposition 2

$$(H0)' \Rightarrow (Bords)$$

▷ En effet $C_Q(x, y; s, t) = \int q(x, dz; s, t) (z - y)^+$ mais $(z - y)^+ < z$ et par convergence dominée $\lim_{y \uparrow \infty} C_Q(x, y; s, t) = 0$. De plus $\frac{\partial_a C_Q}{\partial y}(x, y; s, t) = -\int q(x, dz; s, t) 1(z > y)$ et par le même argument $\lim_{y \downarrow 0} \frac{\partial_a C_Q}{\partial y}(x, y; s, t) = -1$. Enfin

$$\begin{aligned} & y \frac{\partial_a P_Q}{\partial y}(x, y; s, t) - P_Q(x, y; s, t) \\ &= \int q(x, dz; s, t) z 1(z \leq y) \end{aligned}$$

et par convergence monotone

$$\begin{aligned} & \lim_{y \uparrow \infty} y \frac{\partial_a P_Q}{\partial y}(x, y; s, t) - P_Q(x, y; s, t) \\ &= \int q(x, dz; s, t) z = x \end{aligned}$$

◁

Proposition 3 *Sous (H0)'*

$$q(x, dy; s, t) = \frac{\partial^2 P_Q}{\partial y^2}(x, dy; s, t) = \frac{\partial^2 C_Q}{\partial y^2}(x, dy; s, t)$$

(égalité au sens mesures).

▷ En effet d'après le lemme 3

$$C_Q(x, y; s, t) = \int \frac{\partial^2 P_Q}{\partial y^2}(x, dz; s, t) (z - y)^+$$

et

$$P_Q(x, y; s, t) = \int \frac{\partial^2 P_Q}{\partial y^2}(x, dz; s, t) (y - z)^+$$

Les mesures $\frac{\partial^2 P_Q}{\partial y^2}(x, dz; s, t)$ et $q(x, dy; s, t)$ coïncident sur F , et par la proposition 1 elles sont donc égales. \triangleleft

La démonstration donne plus: supposons seulement (*Bords*). Alors la mesure positive $\frac{\partial^2 P_Q}{\partial y^2}(x, dz; s, t)$ vérifie

$$\forall x \in R_+^*, 0 \leq s < t, f \in F \quad Q_{s,t}f[x] = \int \frac{\partial^2 P_Q}{\partial y^2}(x, dy; s, t) f(y)$$

Soit $f \geq 0 \in F$. Supposons que la fonction $x \mapsto Q_{s,t}f[x]$ soit s.c.i.. Elle est alors mesurable, il existe une suite f_n de fonctions de F convergant en croissant vers $Q_{s,t}f$ et par convergence monotone pour la mesure $\frac{\partial^2 P_Q}{\partial y^2}(w, dx; r, s)$:

$$\begin{aligned} & \int \frac{\partial^2 P_Q}{\partial y^2}(w, dx; r, s) Q_{s,t}f[x] \\ &= \lim \int \frac{\partial^2 P_Q}{\partial y^2}(w, dx; r, s) f_n(x) \\ &= \lim Q_{r,s}f_n[w] \\ &\leq Q_{r,s}Q_{s,t}f[x] \\ &= Q_{r,t}f[x] \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} & \int \frac{\partial^2 P_Q}{\partial y^2}(w, dx; r, s) \int \frac{\partial^2 P_Q}{\partial y^2}(x, dz; s, t) f(z) \\ &\leq \int \frac{\partial^2 P_Q}{\partial y^2}(w, dz; r, t) f(z) \end{aligned}$$

On passe alors à f borélienne positive bornée, et la mesure $\int \frac{\partial^2 P_Q}{\partial y^2}(w, dx; r, s) \frac{\partial^2 P_Q}{\partial y^2}(x, dz; s, t)$ est dominée par $\frac{\partial^2 P_Q}{\partial y^2}(w, dz; r, t)$. Mais ce sont 2 mesures de probabilité, elles sont donc égales et Q vérifie ($H0$)'.

Proposition 4 *Supposons (Bords) et que $\forall f \geq 0 \in F$, la fonction*

$$x \mapsto Q_{s,t}f[x]$$

est semi-continue inférieurement. Alors Q vérifie $(H0)'$.

Dépendance en x .

Evidemment, on a du mal à dire quelque chose dans le cas général. Notons tout de même qu'à cause de $(x - y)^+ \leq C_Q(x, y; s, t) \leq x$ on a

$$\lim_{x \downarrow 0^+} C_Q(x, y; t, u) = 0 \quad (2.5)$$

et

$$\lim_{x \uparrow \infty} \frac{C_Q(x, y; t, u)}{x} = 1 \quad (2.6)$$

Remarque 4 *Si les calls sont croissants et les puts décroissants en x , ils sont alors lipschitziens de rapport 1, à cause de la parité call-put: en effet*

$$\forall y \in R_+^*, 0 \leq t < u, 0 < x_1 \leq x_2$$

$$0 \leq C_Q(x_2, y; t, u) - C_Q(x_1, y; t, u) = P_Q(x_2, y; t, u) - P_Q(x_1, y; t, u) + x_2 - x_1 \leq x_2 - x_1$$

2.2 Calls et puts convexes.

On note $(Conv)$ la propriété de propagation de la convexité par Q , soit:

- $(Conv)$ toutes les fonctions calls (ou toutes les fonctions puts) sont convexes.

Si elles sont convexes, les fonctions calls sont en particulier continues. Une fonction nulle en zéro positive et convexe est croissante. La dérivée à droite $\frac{\partial_d C_Q}{\partial x}$ est positive, croissante, et plus petite que 1 à cause de l'asymptotique du call quand $x \rightarrow \infty$.

On a donc

$$\exists \lim_{x \downarrow 0^+} \frac{\partial_d C_Q}{\partial x}(x, y; s, t)$$

et

$$\exists \lim_{x \uparrow \infty} \frac{\partial_d C_Q}{\partial x}(x, y; s, t)$$

et toujours à cause de (2.6)

$$\lim_{x \uparrow \infty} \frac{\partial_d C_Q}{\partial x}(x, y; s, t) = 1$$

La fonction $x \mapsto x \frac{\partial_d C_Q}{\partial x}(x, y; s, t) - C_Q(x, y; s, t)$ est croissante, nulle en zéro, et majorée:

$$\begin{aligned} & x \frac{\partial_d C_Q}{\partial x}(x, y; t, u) - C_Q(x, y; t, u) \\ & \leq x - C_Q(x, y; t, u) \\ & = y - P_Q(x, y; t, u) \\ & \leq y \end{aligned}$$

D'où

$$\exists \lim_{x \uparrow \infty} x \frac{\partial_d C_Q}{\partial x}(x, y; t, u) - C_Q(x, y; t, u) \leq y$$

En fait, on aurait pu s'épargner tout effort en remarquant que la fonction $x \mapsto C_Q(x, y; s, t)$ a exactement les mêmes propriétés sous l'hypothèse de convexité que celles de la fonction $y \mapsto P_Q(x, y; s, t)$ utilisées dans la partie précédente. On a ainsi directement:

Lemme 5 *Sous (Conv)*

$$\begin{aligned} C_Q(x, y; s, t) &= x \lim_{z \downarrow 0^+} \frac{\partial_d C_Q}{\partial z}(z, y; s, t) + f(x - z)^+ \frac{\partial^2 C_Q}{\partial z^2}(dz, y; s, t) \\ P_Q(x, y; s, t) &= y - \lim_{z \uparrow \infty} \left[z \frac{\partial_d C_Q}{\partial z}(z, y; s, t) - C_Q(z, y; s, t) \right] \\ &\quad + f(z - x)^+ \frac{\partial^2 C_Q}{\partial z^2}(dz, y; s, t) \end{aligned}$$

2.3 Convexité et dualité call-put.

2.3.1 Un espace de Banach naturel.

On remarque que les fonctions $y \mapsto C_Q(x, y; s, t)$ et $y \mapsto P_Q(x, y; s, t)$ sont dans l'e.v.

$$G = \left\{ g \in C^0(\mathbb{R}^{*+}) / \exists K, L \frac{g(x)}{x} \rightarrow K \text{ quand } x \rightarrow \infty, g(x) \rightarrow L \text{ quand } x \rightarrow 0^+ \right\}$$

On note pour $g \in G$

$$g_0 = \lim_{0^+} g(x)$$

$$g_\infty = \lim_{0^+} \frac{g(x)}{x}$$

On a $F \subset G$ et l'on peut réécrire le lemme 3 :

$$\forall f \in F$$

$$\begin{aligned} Q_{s,t}f(x) &= Q(x, \infty; s, t) f_\infty \\ &\quad + Q(x, 0; s, t) f_0 \\ &\quad + \int f(z) Q(x, dz; s, t) \end{aligned}$$

Sous (Conv) $x \mapsto C_Q(x, y; s, t)$ et $x \mapsto P_Q(x, y; s, t)$ sont aussi dans G , ie $Q_{s,t}F \subset G$.

On munit dorénavant G d'une structure d'espace de Banach pour la norme

$$\|g\| = \sup \frac{|g(x)|}{1+x}$$

Pour $f \in F$

$$\begin{aligned} |Q_{s,t}f(x)| &= \left| Q_{s,t} \left[\frac{(1+\cdot)f(\cdot)}{(1+\cdot)} \right] (x) \right| \\ &\leq |Q_{s,t}[(1+\cdot)\|f\|](x)| \\ &= \|f\| |Q_{s,t}[(1+\cdot)](x)| \\ &= \|f\| (1+x) \end{aligned}$$

et

$$\|Q_{s,t}f\| \leq \|f\|$$

$Q_{s,t}$ est une contraction de F dans G , mais il est facile de voir que F est dense dans G ,

et par suite $Q_{s,t}$ s'étend de façon unique en une contraction de G .

Proposition 5 Q vérifie $(Conv)$ si et seulement si Q provient d'un semi-groupe d'opérateurs positifs, markoviens et martingaliens (et donc de contractions) de G qui vérifie $(Conv)$.

2.3.2 Semi-groupe call-put dual.

Toujours sous $(Conv)$ on remarque que le lemme 5 suggère de définir un opérateur $\widehat{Q}_{s,t}$ de F dans G par la formule

$$\begin{aligned} \widehat{Q}_{s,t}f(y) &= \left[y - \lim_{z \uparrow \infty} \left(z \frac{\partial_a C_Q}{\partial z}(z, y; s, t) - C_Q(z, y; s, t) \right) \right] f_\infty \\ &\quad + \left[\lim_{z \downarrow 0^+} \frac{\partial_a C_Q}{\partial z}(z, y; s, t) \right] f_0 \\ &\quad + \int f(z) \frac{\partial^2 C_Q}{\partial z^2}(dz, y; s, t) \end{aligned}$$

Cet opérateur est clairement positif, markovien et martingalien. Il propage la convexité à cause de la convexité des fonctions $C_Q(x, y; s, t)$ et $P_Q(x, y; s, t)$ en y . On peut comme ci-dessus l'étendre en un opérateur de G positif, markovien et martingalien. Par construction, on a la relation remarquable de "dualité call-put"

$$\widehat{Q}_{s,t}(\cdot - x)^+[y] = Q_{s,t}(y - \cdot)^+[x]$$

On dit que $\widehat{Q}_{s,t}$ est l'opérateur "call-put dual" de $Q_{s,t}$. $\widehat{Q}_{s,t}$ vérifie les mêmes hypothèses que $Q_{s,t}$, $\widehat{\widehat{Q}}_{s,t}$ est bien défini et bien sûr

$$\widehat{\widehat{Q}}_{s,t} = Q_{s,t}$$

Il est naturel de se demander quelle relation de composition vérifient les $\widehat{Q}_{s,t}$. Avec

des notations ad hoc destinées à clarifier la situation:

$$\begin{aligned}
& \widehat{Q}_{t,u} \widehat{Q}_{s,t} (x - \cdot)^+ [y] \\
&= \widehat{Q}_{t,u}^{(*)} \left[\widehat{Q}_{s,t}^{(\cdot)} (x - \cdot)^+ (*) \right] [y] \\
&= \widehat{Q}_{t,u}^{(*)} \left[Q_{s,t}^{(\cdot)} (\cdot - *)^+ (x) \right] [y] \\
&= Q_{s,t}^{(\cdot)} \left[\widehat{Q}_{t,u}^{(*)} (\cdot - *)^+ (y) \right] [x] \\
&= Q_{s,t}^{(\cdot)} \left[Q_{t,u}^{(*)} (* - y)^+ (\cdot) \right] [x] \\
&= Q_{s,u} (\cdot - y)^+ [x] \\
&= \widehat{Q}_{s,u} (x - \cdot)^+ [y]
\end{aligned}$$

Et \widehat{Q} satisfait une relation de co-semi-groupe

$$\widehat{Q}_{t,u} \widehat{Q}_{s,t} = \widehat{Q}_{s,u}$$

On a montré finalement

Proposition 6 *Un semi-groupe Q d'opérateurs positifs, markoviens et martingaliens sur G propage la convexité si et seulement si il existe un co-semi-groupe \widehat{Q} d'opérateurs positifs, markoviens et martingaliens sur G qui propage la convexité tel qu'on ait*

$$\forall (x, y) \in R_+^{*2}, 0 \leq s < t$$

$$\widehat{Q}_{s,t} (\cdot - x)^+ [y] = Q_{s,t} (y - \cdot)^+ [x]$$

Remarque 6 *Dans le cas homogène, $Q_{s,t} = Q_{t-s}$, $\widehat{Q}_{s,t} = \widehat{Q}_{t-s}$ et le co-semi groupe \widehat{Q} est un semi-groupe.*

Remarque 7 *On n'a rien dit jusqu'ici sur le paramètre temps: tout cela fonctionne en temps discret, en particulier; notons que la dualité call-put est définie au niveau des opérateurs.*

2.4 Propriétés de la dualité call-put.

On suppose dans tous ces énoncés que Q vérifie *(Conv)*.

On a d'après les propositions 2 et 4 :

Proposition 7 Q vérifie *(Bords)* $\Leftrightarrow Q$ vérifie *(H0)'*

On note de façon naturelle:

- *(Bords Dual)*

$$\begin{cases} \lim_{x \uparrow \infty} x \frac{\partial_d C_Q}{\partial x}(x, y; s, t) - C_Q(x, y; s, t) = y \\ \lim_{x \downarrow 0^+} \frac{\partial_d C_Q}{\partial x}(x, y; s, t) = 0 \end{cases}$$

On a immédiatement:

Proposition 8 Q vérifie *(Bords)* $\Leftrightarrow \hat{Q}$ vérifie *(Bords Dual)*

Proposition 9 Soit Q vérifiant *(Bords)*. Alors

$q(x, dy; s, t)$ admet une densité continue en y
par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}_+^*

\Leftrightarrow

Les calls $C_{\hat{Q}}(x, y; s, t)$ sont C^2 en x .

La propriété de domination suivante est très utile en pratique:

Proposition 10 Supposons que pour chaque (y, s, t) , $s < t$ il existe une fonction $b(x)$ convexe nulle en zéro, telle que $\lim_{x \downarrow 0} b'(x) = 0$ et $\lim_{x \uparrow \infty} xb'(x) - b(x) = y$ (où b' désigne la dérivée à droite) et telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad b(x) \geq P_Q(y, x; s, t)$$

(resp. $b(x) \geq C_Q(x, y; s, t)$)

Alors Q vérifie (Bords) (resp.(Bords Dual)).

Corollaire 8 Supposons qu'il existe R vérifiant (H0) et (Bords) (resp.(Bords Dual))

tel que

$$\forall (x, y) \in R_+^{*2}, 0 \leq s < t \quad C_Q(x, y; s, t) \leq C_R(x, y; s, t)$$

Alors Q vérifie (Bords) (resp.(Bords Dual)).

▷ En zéro $\lim_{z \downarrow 0^+} \frac{P_Q(y, z; s, t)}{z} = \lim_{z \downarrow 0^+} \frac{\partial_d P_Q}{\partial z}(y, z; s, t)$, $0 \leq P_Q(y, x; s, t) \leq b(x)$ et $b(x) = o(x)$ d'où le résultat.

A l'infini, on sait

$$P_Q(y, x; s, t) - x \frac{\partial_d P_Q}{\partial x}(y, x; s, t) \downarrow -l \geq -y$$

et il s'agit de montrer $l = y$. On a

$$\begin{aligned} & P_Q(y, 2x; s, t) - 2x \frac{\partial_d P_Q}{\partial x}(y, 2x; s, t) \\ \leq & P_Q(y, 2x; s, t) - 2x \left(\frac{\frac{\partial_d P_Q}{\partial x}(y, 2x; s, t) - \frac{\partial_d P_Q}{\partial x}(y, x; s, t)}{2x - x} \right) \\ = & 2P_Q(y, x; s, t) - P_Q(y, 2x; s, t) \\ \leq & 2b(x) - P_Q(y, 2x; s, t) \\ \leq & 2b(x) - (2x - y)^+ \end{aligned}$$

Pour $2x \geq y$

$$\begin{aligned} & 2b(x) - (2x - y)^+ \\ = & 2b(x) - (2x - y) \\ = & 2(b(x) - x) + y \\ \leq & 2(b(x) - xb'(x)) + y \end{aligned}$$

et $b(x) - xb'(x) \rightarrow -y$ d'où le résultat. ◁

2.5 Semi-groupe mesure et dualité call-put.

Une idée très naturelle pour étudier la propagation de la convexité est d'identifier une fonction convexe à sa dérivée seconde mesure de Radon; ceci est possible ici à cause des hypothèses de Markov et de martingale. La convexité dans l'espace des fonctions devient la positivité dans l'espace des mesures. Plus précisément, soit

$$E = \left\{ \text{mesures signées } \mu \text{ sur } R^{*+} / \int (1+y) |\mu|(dy) < \infty \right\}$$

$$\tilde{G} = \left\{ g / \exists \mu \in E, (\alpha, \beta) \in R^2 \ g(x) = \int (x-y)^+ \mu(dy) + \alpha x + \beta \right\}$$

On remarque que $g \in \tilde{G}$ est continue, et de plus $\frac{g(x)}{x} \rightarrow \int \mu(dy) + \alpha$ quand $x \rightarrow \infty$ et $g(x) \rightarrow \beta$ quand $x \rightarrow 0^+$ de sorte que $g \in G$ avec

$$\begin{aligned} g_0 &= \beta \\ g_\infty &= \int \mu(dy) + \alpha \end{aligned}$$

De plus, il est clair que la décomposition de $g \in \tilde{G}$ en (μ, α, β) est unique.

Regardons l'action de Q sur \tilde{G} :

$$\begin{aligned} Q_{s,t}g(x) - \alpha x - \beta &= Q_{s,t} \left[\int (\cdot - y)^+ \mu(dy) \right] (x) \\ &= Q(x, \infty; s, t) \int \mu(dy) \\ &\quad + \int Q(x, dz; s, t) \int (z - y)^+ \mu(dy) \\ &= Q(x, \infty; s, t) \int \mu(dy) \\ &\quad + \int \mu(dy) \int Q(x, dz; s, t) (z - y)^+ \\ &= \int \mu(dy) \left[Q(x, \infty; s, t) + \int Q(x, dz; s, t) (z - y)^+ \right] \\ &= \int \mu(dy) C_Q(x, y; s, t) \end{aligned}$$

Mais sous l'hypothèse $(Conv)$

$$C_Q(x, y; s, t) = x \widehat{Q}(y, 0, s, t) + \int \widehat{Q}(y, dz; s, t) (x - z)^+$$

et par Fubini

$$\int \mu(dy) C_Q(x, y; s, t) = x \int \mu(dy) \widehat{Q}(y, 0, s, t) + \int \int \mu(dy) \widehat{Q}(y, dz; s, t) (x - z)^+$$

Soit

$$\nu_{s,t}(dz) = \int \mu(dy) \widehat{Q}(y, dz; s, t)$$

Alors à cause de (2.4)

$$\begin{aligned} \int (1+z) |\nu_{s,t}|(dz) &\leq \int |\mu|(dy) \left[\int (1+z) \widehat{Q}(y, dz; s, t) \right] \\ &\leq \int (1+y) |\mu|(dy) \\ &< \infty \end{aligned} \tag{2.7}$$

et $\nu_{s,t} \in E$.

Proposition 11 *Soit Q vérifiant $(Conv)$. Alors*

$$\forall g = (\mu, \alpha, \beta) \in \widetilde{G}, t > s \geq 0 \quad Q_{s,t}g \in \widetilde{G}$$

et

$$Q_{s,t}g = \left(\nu_{s,t}, \alpha + \int \widehat{Q}(y, 0, s, t) \mu(dy), \beta \right)$$

avec

$$\nu_{s,t}(dz) = \int \widehat{Q}(y, dz; s, t) \mu(dy)$$

L'hypothèse $(Conv)$ est supposée vérifiée dans la suite.

On note \widetilde{Q} le semi-groupe induit par Q sur \widetilde{G} .

Remarque 9 $F \subset \widetilde{G}$, F est dense dans G , et le semi-groupe Q est entièrement défini

par \tilde{Q} .

\tilde{Q} est très proche du semi-groupe "mesure" du début: soit

$$\begin{aligned} T : \tilde{G} &\rightarrow E \\ g = (\mu, \alpha, \beta) &\mapsto Tg = \mu \end{aligned}$$

la restriction de l'opérateur dérivée seconde à \tilde{G} . Les fonctions affines étant invariantes par \tilde{Q}, \tilde{Q} induit un semi-groupe d'opérateurs sur l'e.v. quotient $\tilde{G}/\text{fonctions affines}$, qu'on note encore \tilde{Q} . T est un isomorphisme de $\tilde{G}/\text{fonctions affines}$ sur E , le semi-groupe image de \tilde{Q} est

$$\begin{aligned} \bar{Q} : E &\rightarrow E \\ \mu &\mapsto \bar{Q}\mu = T\tilde{Q}T^{-1}\mu \end{aligned}$$

On a

$$\bar{Q}_{s,t}\mu(dz) = \nu_{s,t}(dz) = \int \hat{Q}(y, dz; s, t) \mu(dy)$$

et $\bar{Q}_{s,t}$ est positif, et de contraction sur E pour la norme $\int (1+y) d|\mu|(y)$ d'après (2.7).

$\bar{Q}_{s,t}$ vérifie de plus

$$\forall y \in R_+^*$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \bar{Q}_{s,t}\delta_y, 1 \rangle \leq 1 \\ 0 &\leq \langle \bar{Q}_{s,t}\delta_y, Id \rangle \leq y \end{aligned} \tag{2.8}$$

et aussi $y \mapsto \bar{Q}_{s,t}\delta_y$ est $\sigma(E, G)$ continue et

$$\forall \mu \in E$$

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{s,t}\mu(dz) &= \int \hat{Q}(y, dz; s, t) \mu(dy) \\ &= \int (\bar{Q}_{s,t}\delta_y)(dz) \mu(dy) \end{aligned} \tag{2.9}$$

Réciproquement, à un semi-groupe \bar{Q} positif et de contractions de E qui vérifie ces 3

propriétés on associe les opérateurs définis sur \widetilde{G} par

$$\widetilde{Q}_{s,t}(\mu, \alpha, \beta) = (\overline{Q}_{s,t}\mu, \alpha + f [1 - \langle \overline{Q}_{s,t}\delta_y, 1 \rangle] \mu(dy), \beta)$$

On a alors

$$\begin{aligned} \widetilde{Q}_{s,t}Id &= \widetilde{Q}_{s,t}(0, 1, 0) = (0, 1, 0) = Id \\ \widetilde{Q}_{s,t}z &= \widetilde{Q}_{s,t}(0, 0, z) = (0, 0, z) = z \end{aligned}$$

ie des opérateurs markoviens et martingaliens.

Qu'en est-il de la propriété de semi-groupe?

$$\begin{aligned} &\widetilde{Q}_{s,t}\widetilde{Q}_{t,u}(\mu, \alpha, \beta) \\ &= \widetilde{Q}_{s,t}(\overline{Q}_{t,u}\mu, \alpha + f [1 - \langle \overline{Q}_{t,u}\delta_y, 1 \rangle] \mu(dy), \beta) \\ &= (\overline{Q}_{s,t}\overline{Q}_{t,u}\mu, \\ &\quad \alpha + f [1 - \langle \overline{Q}_{t,u}\delta_y, 1 \rangle] \mu(dy) + f [1 - \langle \overline{Q}_{s,t}\delta_y, 1 \rangle] \overline{Q}_{t,u}\mu(dy), \\ &\quad \beta) \\ &= (\overline{Q}_{t,u}\mu, \\ &\quad \alpha + f \mu(dy) - f \langle \overline{Q}_{s,t}\delta_y, 1 \rangle \overline{Q}_{t,u}\mu(dy) + f [\overline{Q}_{t,u}\mu(dy) - \langle \overline{Q}_{t,u}\delta_y, 1 \rangle \mu(dy)] \\ &\quad \beta) \end{aligned}$$

Mais par Fubini et (2.9)

$$\begin{aligned} f \langle \overline{Q}_{t,u}\delta_y, 1 \rangle \mu(dy) &= \int_y \int_z (\overline{Q}_{t,u}\delta_y)(dz) \mu(dy) \\ &= \int_z \int_y (\overline{Q}_{t,u}\delta_y)(dz) \mu(dy) \\ &= \int_z (\overline{Q}_{t,u}\mu)(dz) \\ &= \langle \overline{Q}_{t,u}\mu, 1 \rangle \end{aligned}$$

et en particulier

$$\begin{aligned} f \langle \overline{Q}_{s,t}\delta_y, 1 \rangle \overline{Q}_{t,u}\mu(dy) &= \langle \overline{Q}_{s,t}\overline{Q}_{t,u}\mu, 1 \rangle \\ &= \langle \overline{Q}_{s,u}\mu, 1 \rangle \end{aligned}$$

d'où la propriété de semi-groupe.

On bute sur la propriété de positivité. Ceci est normal, car le quotient par les fonctions affines fait perdre la notion de positivité (ou de croissance).

Pour un call

$$\begin{aligned} & \tilde{Q}_{s,t}(\cdot - z)^+ \\ &= \tilde{Q}_{s,t}(\delta_z, 0, 0) \\ &= (\overline{Q}_{s,t}\delta_z, 1 - \langle \overline{Q}_{s,t}\delta_z, 1 \rangle, 0) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} & \tilde{Q}_{s,t}(\cdot - z)^+[x] \\ &= \int \overline{Q}_{s,t}\delta_z(dy) (x - y)^+ + x(1 - \langle \overline{Q}_{s,t}\delta_z, 1 \rangle) \end{aligned}$$

et $\tilde{Q}_{s,t}(\cdot - z)^+[x] \geq 0$.

Pour un put

$$\begin{aligned} & \tilde{Q}_{s,t}(z - \cdot)^+ \\ &= \tilde{Q}_{s,t}(\delta_z, -1, z) \\ &= (\overline{Q}_{s,t}\delta_z, -\langle \overline{Q}_{s,t}\delta_z, 1 \rangle, z) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \tilde{Q}_{s,t}(z - \cdot)^+[x] \\ &= \int \overline{Q}_{s,t}\delta_z(dy) (x - y)^+ - x \langle \overline{Q}_{s,t}\delta_z, 1 \rangle + z \\ &= \int \overline{Q}_{s,t}\delta_z(dy) [(x - y)^+ - x] + z \\ &= \int \overline{Q}_{s,t}\delta_z(dy) [(y - x)^+ - y] + z \\ &= \int \overline{Q}_{s,t}\delta_z(dy) (y - x)^+ + (z - \int \overline{Q}_{s,t}\delta_z(dy) y) \end{aligned}$$

d'où $\tilde{Q}_{s,t}(z - \cdot)^+[x] \geq 0$.

$\tilde{Q}_{s,t}$ transforme les fonctions convexes positives en fonctions convexes positives, mais ceci ne suffit pas bien sûr à montrer la positivité: il y a des fonctions affines par morceaux positives non convexes!

On a donc un semi-groupe d'opérateurs sur \tilde{G} markovien, martingalien et qui propage la convexité, mais pas nécessairement positif. Il n'est donc plus évident (même en revenant à la définition de \tilde{Q}) que l'on ait des contractions, et qu'on puisse étendre \tilde{Q} à G .

Venons-en au lien avec le semi-groupe call-put dual. On peut identifier le dual G' de G et $E \times \mathbb{R}^2$ via:

$$\langle\langle (\mu, a, b), g \rangle\rangle_{G', G} = \int g d\mu + ag_\infty + bg_0$$

Regardons le semi-groupe dual (le vrai dual) de \widehat{Q} .

$$\begin{aligned} & \langle\langle \widehat{Q}_{s,t}^*(\mu, a, b), (\cdot - y)^+ \rangle\rangle \\ &= \langle\langle (\mu, a, b), \widehat{Q}_{s,t}(\cdot - y)^+ \rangle\rangle \\ &= \langle\langle (\mu, a, b), P_Q(y, \cdot; s, t) \rangle\rangle \\ &= \int P_Q(y, x; s, t) d\mu(x) + a \end{aligned}$$

D'autre part d'après le lemme 5

$$P_Q(y, x; s, t) = \widehat{Q}(x, 0; s, t) + \int (z - y)^+ \widehat{Q}(x, dz; s, t)$$

d'où

$$\begin{aligned} & \int P_Q(y, x; s, t) \mu(dx) \\ &= \int \widehat{Q}(x, 0; s, t) \mu(dx) + \int (z - y)^+ \int \widehat{Q}(x, dz; s, t) \mu(dx) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \langle\langle \widehat{Q}_{s,t}^*(\mu, a, b), (\cdot - y)^+ \rangle\rangle \\ &= \int P_Q(y, x; s, t) \mu(dx) + a \\ &= \int \widehat{Q}(x, 0; s, t) \mu(dx) + \int (z - y)^+ \int \widehat{Q}(x, dz; s, t) \mu(dx) + a \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} & \langle\langle \widehat{Q}_{s,t}^*(\mu, a, b), (y - \cdot)^+ \rangle\rangle \\ &= \int C_Q(y, x; s, t) \mu(dx) + y b \\ &= y \int \widehat{Q}(x, \infty; s, t) \mu(dx) + \int (y - z)^+ \int \widehat{Q}(x, dz; s, t) \mu(dx) + y b \end{aligned}$$

d'où par densité de F dans G

$$\begin{aligned} & \widehat{Q}_{s,t}^*(\mu, a, b) \\ = & \left(\int \widehat{Q}(x, dz; s, t) \mu(dx), \int \widehat{Q}(x, 0; s, t) \mu(dx) + a, \int \widehat{Q}(x, \infty; s, t) \mu(dx) + b \right) \end{aligned}$$

Proposition 12

$$\overline{Q} = \Pi_E \widehat{Q}^* \widetilde{\Pi}_E$$

où Π_E est la projection de G' sur E et $\widetilde{\Pi}_E$ le plongement de E dans G' .

Si Q vérifie (Bords Dual)

$$\overline{Q} = \widehat{Q}_{|E}^*$$

En conclusion, choisir de travailler avec le semi-groupe \overline{Q} , qui est un semi-groupe positif et de contractions sur l'espace de Banach G' , revient à étudier la propagation de la convexité par des semi-groupes d'opérateurs markoviens et martingaliens sur \widetilde{G} , pas nécessairement positifs, problème moins précis que celui qu'on s'est posé initialement.

Chapter 3

CONTINUITÉ DU SEMI-GROUPE

On suppose dans ce chapitre et le suivant que le semi-groupe est homogène en temps et l'on note $C_Q(x, y; t)$ le call $Q_t(\cdot - y)^+[x]$.

L'hypothèse (*Conv*) est supposée vérifiée.

On se doute qu'il y a un lien entre la continuité du semi-groupe en zéro et l'existence de zones où les calls n'ont pas de convexité, celles-ci correspondant en gros aux ensembles de potentiel nul du semi-groupe call-put dual. On va voir qu'on peut dire beaucoup de choses dans cette direction avec des arguments élémentaires.

3.1 Limite des calls en zéro.

A cause de la propriété (2.2) les fonctions $C_Q(\cdot, y; t)$ convergent en décroissant vers une fonction $C_Q^0(\cdot, y)$ qui domine $(\cdot - y)^+$. $C_Q^0(\cdot, y)$ est limite simple de fonctions convexes croissantes, donc convexe croissante, et vérifie aussi $C_Q^0(0, y) = 0$, $\lim_{x \uparrow \infty} \frac{\partial_x C_Q^0}{\partial x}(x, y) = 1$.

Soit $z_{\inf}(y) = \sup \{z < y / C_Q^0(z, y) = 0\}$ et $z_{\sup}(y) = \inf \{z > y / C_Q^0(z, y) = z - y\}$ avec $z_{\inf}(y) = 0$ et $z_{\sup}(y) = \infty$ si les ensembles correspondants sont vides. A cause de la convexité et du comportement aux bords, $C_Q^0(z, y) = 0$ pour $z \leq z_{\inf}(y)$ et $C_Q^0(z, y) = z - y$ pour $z \geq z_{\sup}(y)$. On remarque $z_{\inf}(y) = y \Leftrightarrow z_{\sup}(y) = y \Leftrightarrow C_Q^0(y, y) = 0$.

$C_Q^0(\cdot, y)$ est convexe, donc continue, et par le lemme de Dini $C_Q(\cdot, y; t)$ converge vers

$C_Q^0(., y)$ uniformément sur les compacts de R_+^* . A cause de $C_Q^0(0, y) = C_Q(0, y; t) = 0$ et de $\lim_{x \uparrow \infty} \frac{C_Q(x, y; t)}{x} = \lim_{x \uparrow \infty} \frac{C_Q^0(x, y)}{x} = 1$ les fonctions $C_Q(., y; t)$ convergent vers $C_Q^0(., y)$ dans G .

L'opérateur

$$\begin{aligned} Q_0 : & \quad F \rightarrow G \\ \forall y \in R_+^* & \quad (.-y)^+ \mapsto C_Q^0(., y) \\ \text{et} & \quad (y - .)^+ \mapsto P_Q^0(., y) \end{aligned}$$

est une limite de contractions et donc une contraction, et s'étend de façon unique à G .

Les opérateurs Q_t étant continus de G dans G on a pour $t > 0$, les limites étant prises dans G

$$Q_0 Q_t = \lim_{s \downarrow 0} Q_s Q_t = \lim_{s \downarrow 0} Q_t Q_s = Q_t Q_0$$

et

$$Q_0^2 = \lim_{s \downarrow 0} Q_s Q_s = \lim_{s \downarrow 0} Q_{2s} = Q_0$$

et le semi-groupe Q est fortement continu sur le Banach $Q_0 G$.

On a $Q_0(.-y)^+ \geq (.-y)^+$ d'où pour $0 < s < t$

$$Q_t Q_0(.-y)^+ \geq Q_t(.-y)^+ = Q_{t-s} Q_s(.-y)^+$$

Mais par définition de Q_0 on a $Q_s(.-y)^+ \geq Q_0(.-y)^+$ et

$$Q_{t-s} Q_s(.-y)^+ \geq Q_{t-s} Q_0(.-y)^+$$

Finalement $Q_t Q_0(.-y)^+ \geq Q_t(.-y)^+ \geq \lim_{s \downarrow 0} Q_{t-s} Q_0(.-y)^+ = Q_t Q_0(.-y)^+$ et par densité de F dans G cela entraîne $Q_t Q_0 = Q_t$.

Proposition 13 *Q est fortement continu sur le Banach $Q_0 G$ et*

$$\forall t \geq 0 \quad Q_t Q_0 = Q_0 Q_t = Q_t$$

Q est fortement continu sur $G \Leftrightarrow Q_0 = Id \Leftrightarrow \forall y \in R_+^* C_Q^0(y, y) = 0$.

3.2 Cas non continu.

On se place dans le cas où Q n'est pas fortement continu sur G .

L'exemple non continu le plus simple est donné par $Q_t g = g_0 + g_\infty Id$ pour tout $t > 0$. Q est trivialement markovien martingalien positif, propage la convexité, et c'est un semi-groupe à cause de l'idempotence de $g \mapsto g_0 + g_\infty Id$.

C'est le cas $a = 0, b = \infty$ dans la famille de semi-groupes donnés par, a et b étant fixés, $a < b$:

$\forall t > 0$

$$\begin{aligned} Q_t g(x) &= g(x) \text{ pour } x \notin [a, b] \\ &= g(b) \frac{x-a}{b-a} + g(a) \frac{b-x}{b-a} \text{ sinon} \end{aligned}$$

Il est facile de rajouter une dépendance en temps.

On remarque sur ces exemples que les fonctions images du semi-groupe n'ont pas de convexité sur $]a, b[$ et sont entièrement déterminées par la restriction de Q à

$$Vect \{ (\cdot - y)^+, (y - \cdot)^+, y \in]a, b[^c \}$$

On va voir qu'il en est de même dans le cas général.

Soit y tel que $C_Q^0(y, y) > 0$. On peut en fait expliciter la fonction $C_Q^0(\cdot, y)$:

Lemme 10 Soit $I(y) =]z_{\inf}(y), z_{\sup}(y)[$. Alors $I(y)$ est de Q -potentiel nul et

$$\begin{aligned} C_Q^0(x, y) &= 1(x \in I(y)^c) (x - y)^+ + 1(x \in I(y)) \frac{(x - z_{\inf}(y))}{(z_{\sup}(y) - z_{\inf}(y))} (z_{\sup}(y) - y) \\ &= \frac{(z_{\sup}(y) - y)}{(z_{\sup}(y) - z_{\inf}(y))} (x - z_{\inf}(y))^+ + \frac{(y - z_{\inf}(y))}{(z_{\sup}(y) - z_{\inf}(y))} (x - z_{\sup}(y))^+ \end{aligned}$$

où $\frac{1}{\infty} = 0$ et $\frac{\infty}{\infty} = 1$.

▷ La fonction $C_Q^0(., y) - (.-y)^+$ est continue, strictement positive sur $I(y)$ par définition de $z_{\inf}(y)$ et $z_{\sup}(y)$ et nulle sur $I(y)^c$. Mais

$$\forall t \geq 0 \quad Q_t \left[C_Q^0(., y) - (.-y)^+ \right] = 0$$

d'où la première assertion.

La fonction $a(.)$ du membre de droite est convexe, égale à $C_Q^0(., y)$ sur $I(y)^c$ et à la corde de la fonction convexe $C_Q^0(., y)$ sur $I(y)$, d'où $C_Q^0(., y) \leq a(.)$.

$a(.) - (.-y)^+$ est à support dans $I(y)$ et $\forall t > 0 \quad Q_t a(.) = Q_t (.-y)^+$. Par convexité $Q_t (.-y)^+ = Q_t a(.) \geq a(.)$ d'où $C_Q^0(., y) = \lim_{t \downarrow 0} Q_t (.-y)^+ \geq a(.)$.

◁

Corollaire 11 *La fonction $(x, y) \mapsto C_Q^0(x, y)$ est entièrement déterminée par les points $(z_{\inf}(y), z_{\sup}(y))$, $y \in R_+^*$.*

Soit maintenant $z \in]z_{\inf}(y), z_{\sup}(y)[$. En raisonnant comme dans le lemme avec la fonction

$$\left[1(x \in I(y)^c) (x - z)^+ + 1(x \in I(y)) \frac{(x - z_{\inf}(y))}{(z_{\sup}(y) - z_{\inf}(y))} (z_{\sup}(y) - z) \right] - (x - z)^+$$

on montre $z_{\inf}(z) \leq z_{\inf}(y)$ et $z_{\sup}(z) \geq z_{\sup}(y)$. L'ouvert $]z_{\inf}(z), z_{\sup}(z)[$ est de potentiel nul, et en regardant la fonction

$$\left[1(x \in I(z)^c) (x - y)^+ + 1(x \in I(z)) \frac{(x - z_{\inf}(z))}{(z_{\sup}(z) - z_{\inf}(z))} (z_{\sup}(z) - y) \right] - (x - y)^+$$

on arrive à

$$C_Q^0(x, y) = 1(x \in I(z)^c) (x - y)^+ + 1(x \in I(z)) \frac{(x - z_{\inf}(z))}{(z_{\sup}(z) - z_{\inf}(z))} (z_{\sup}(z) - y)$$

soit $z_{\inf}(z) = z_{\inf}(y)$ et $z_{\sup}(z) = z_{\sup}(y)$. On a donc:

Proposition 14 $\forall z \in I(y), \forall x \in R_+^*$

$$C_Q^0(x, z) = \frac{(z_{\sup}(y) - z)}{(z_{\sup}(y) - z_{\inf}(y))} (x - z_{\inf}(y))^+ + \frac{(z - z_{\inf}(y))}{(z_{\sup}(y) - z_{\inf}(y))} (x - z_{\sup}(y))^+$$

En particulier

$$C_Q^0(z, z) = \frac{(z_{\sup}(y) - z)(z - z_{\inf}(y))}{(z_{\sup}(y) - z_{\inf}(y))}$$

Par continuité $C_Q^0(z_{\inf}(y), z_{\inf}(y)) = C_Q^0(z_{\sup}(y), z_{\sup}(y)) = 0$.

Par action du semi-groupe et parité call-put:

Corollaire 12 $\forall z \in I(y), \forall x \in R_+^*$

$$\begin{aligned} C_Q(x, z; t) &= \frac{(z_{\sup}(y) - z)}{(z_{\sup}(y) - z_{\inf}(y))} C_Q(x, z_{\inf}(y); t) + \frac{(z - z_{\inf}(y))}{(z_{\sup}(y) - z_{\inf}(y))} C_Q(x, z_{\sup}(y); t) \\ P_Q(x, z; t) &= \frac{(z_{\sup}(y) - z)}{(z_{\sup}(y) - z_{\inf}(y))} P_Q(x, z_{\inf}(y); t) + \frac{(z - z_{\inf}(y))}{(z_{\sup}(y) - z_{\inf}(y))} P_Q(x, z_{\sup}(y); t) \end{aligned}$$

Servons-nous maintenant de la dualité call-put. On remarque qu'on a évidemment $C_Q^0(x, z) = P_Q^0(z, x)$, $C_Q^0(x, z) = P_Q^0(x, z) + x - z$ et $C_Q^0(z, z) = P_Q^0(z, z) = C_Q^0(z, z) = P_Q^0(z, z)$.

Les intervalles $I(y)$ sont les mêmes pour Q et \hat{Q} et par le corollaire 11 $C_Q^0(x, z) = C_{\hat{Q}}^0(x, z)$. On en tire la relation $C_Q^0(x, z) - C_Q^0(z, x) = x - z$. On vérifie qu'elle est cohérente avec la proposition 14.

Proposition 15 Q est fortement continu $\Leftrightarrow \hat{Q}$ est fortement continu

De plus $\forall (x, z) \in R_+^{*2}$ $C_Q^0(x, z) = C_{\hat{Q}}^0(x, z)$ et par suite $C_Q^0(x, z) - C_Q^0(z, x) = x - z$.

Soit maintenant $(x, z) \in I(y)^2$ et $t \geq 0$. L'application du corollaire 12 à \hat{Q} donne:

$$C_{\hat{Q}}(x, z; t) = \frac{(z_{\sup}(y) - z)}{(z_{\sup}(y) - z_{\inf}(y))} C_{\hat{Q}}(x, z_{\inf}(y); t) + \frac{(z - z_{\inf}(y))}{(z_{\sup}(y) - z_{\inf}(y))} C_{\hat{Q}}(x, z_{\sup}(y); t)$$

Par dualité call-put

$$\begin{aligned}
P_Q(x, z; t) &= C_{\widehat{Q}}(z, x; t) \\
&= \frac{(z_{\sup}(y) - x)}{(z_{\sup}(y) - z_{\inf}(y))} C_{\widehat{Q}}(z, z_{\inf}(y); t) \\
&\quad + \frac{(x - z_{\inf}(y))}{(z_{\sup}(y) - z_{\inf}(y))} C_{\widehat{Q}}(z, z_{\sup}(y); t)
\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}
C_{\widehat{Q}}(z, z_{\inf}(y); t) &= P_Q(z_{\inf}(y), z; t) \\
&= \frac{(z_{\sup}(y) - z)}{(z_{\sup}(y) - z_{\inf}(y))} P_Q(z_{\inf}(y), z_{\inf}(y); t) \\
&\quad + \frac{(z - z_{\inf}(y))}{(z_{\sup}(y) - z_{\inf}(y))} P_Q(z_{\inf}(y), z_{\sup}(y); t)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
C_{\widehat{Q}}(z, z_{\sup}(y); t) &= P_Q(z_{\sup}(y), z; t) \\
&= \frac{(z_{\sup}(y) - z)}{(z_{\sup}(y) - z_{\inf}(y))} P_Q(z_{\sup}(y), z_{\inf}(y); t) \\
&\quad + \frac{(z - z_{\inf}(y))}{(z_{\sup}(y) - z_{\inf}(y))} P_Q(z_{\sup}(y), z_{\sup}(y); t)
\end{aligned}$$

d'où

Proposition 16 $\forall (x, z) \in I(y)^2, \forall t \geq 0$

$$\begin{aligned}
P_Q(x, z; t) &= \frac{(z_{\sup}(y) - x)(z_{\sup}(y) - z)}{(z_{\sup}(y) - z_{\inf}(y))^2} P_Q(z_{\inf}(y), z_{\inf}(y); t) \\
&\quad + \frac{(z_{\sup}(y) - x)(z - z_{\inf}(y))}{(z_{\sup}(y) - z_{\inf}(y))^2} P_Q(z_{\inf}(y), z_{\sup}(y); t) \\
&\quad + \frac{(x - z_{\inf}(y))(z_{\sup}(y) - z)}{(z_{\sup}(y) - z_{\inf}(y))^2} P_Q(z_{\sup}(y), z_{\inf}(y); t) \\
&\quad + \frac{(x - z_{\inf}(y))(z - z_{\inf}(y))}{(z_{\sup}(y) - z_{\inf}(y))^2} P_Q(z_{\sup}(y), z_{\sup}(y); t)
\end{aligned}$$

et idem pour les calls.

En conclusion on peut énoncer:

Proposition 17

$$Q_0F = Vect \left\{ (\cdot - z_{\inf}(y))^+, (\cdot - z_{\sup}(y))^+, (z_{\inf}(y) - \cdot)^+, (z_{\sup}(y) - \cdot)^+, y \in R_+^* \right\}$$

Les fonctions de l'image de G par Q sont affines sur les intervalles $I(y)$, $y \in R_+^$ et Q est fortement continu sur l'espace de Banach $\overline{Q_0F}^G$ constitué des fonctions de G qui sont affines sur les $I(y)$, $y \in R_+^*$.*

Le semi-groupe ne peut donc pas "inventer" la convexité, et il est continu aux points où il en présente. Le défaut de continuité s'explique complètement par le fait qu'on a posé le problème de la propagation de la convexité en tous les points de R_+^* alors qu'il fallait le poser sur $\left(\bigcup_{y \in R_+^*} I(y)\right)^c$.

Chapter 4

GENERATEUR INFINITESIMAL

La vraie question est de caractériser la conservation de la convexité en termes du générateur infinitésimal du semi-groupe, d'accès souvent plus aisé que les opérateurs du semi-groupe.

L'existence du semi-groupe call-put dual suggère de traduire sur A le fait que \hat{A} est un générateur infinitésimal. Heuristiquement, on a envie d'écrire, pour des fonctions f adéquates, dans le cas à densités

$$\begin{aligned}\hat{Q}_t f(x) &= \int \hat{q}(x, y; t) f(y) dy \\ &= \int \int_{z \geq x} \frac{\partial^2 q(y, z; t)}{\partial y^2} (z - x) dz f(y) dy \\ &= \int_{z \geq x} (z - x) dz \int_y \frac{\partial^2 q(y, z; t)}{\partial y^2} f(y) dy \\ &= \int_{z \geq x} (z - x) dz \int_y f''(y) q(y, z; t) dy \\ &= \int_y f''(y) dy \int_{z \geq x} q(y, z; t) (z - x) dz\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}f(x) &= \int_y f''(y) dy \int_{z \geq x} \delta_y(z) (z - x) dz \\ &= \int_y f''(y) dy \int_{z \geq x} q(y, z; 0) (z - x) dz\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\hat{Q}_t f(x) - f(x)}{t} = \int_y f''(y) dy \left(\frac{Q_t g - g}{t} \right) (y)$$

avec

$$g(\cdot) = (\cdot - x)^+$$

En faisant comme si g appartenait au domaine de A :

$$\widehat{A}f(x) = \int f''(y)[Ag](y) dy$$

soit

$$\begin{aligned} \widehat{A}f(x) &= \int [A^*f''](y)g(y)dy \\ &= \int [A^*f''](y)(y-x)^+ dy \end{aligned}$$

ou encore

$$[\widehat{A}f(x)]'' = [A^*f''](x) \tag{4.1}$$

où A^* est l'adjoint de A .

Il s'agit donc, en gros, de caractériser les générateurs infinitésimaux A tels que l'opérateur C défini par

$$f \mapsto \left(x \mapsto \int [A^*f''](y)(y-x)^+ dy \right)$$

sur un domaine adéquat, soit encore un générateur infinitésimal.

Dans un contexte d'espace de Banach, C doit typiquement satisfaire un principe du maximum et une condition de densité de l'image de $D(C)$ par $C - \lambda Id$ pour λ grand.

Resterait encore à montrer, bien entendu, que le semi-groupe associé à C est le semi-groupe call-put dual de Q .

On commence par rappeler quelques résultats sur le semi-groupe adjoint.

4.1 Rappels.

On note w^* la topologie $*$ faible sur le dual d'un espace de Banach.

On se donne pour l'instant un semi-groupe Q de contractions fortement continu sur

G .

On rappelle que son adjoint Q^* est un semi-groupe de contractions sur G' , qui n'est pas nécessairement fortement continu. Néanmoins, on sait beaucoup de choses sur le semi-groupe adjoint: soit G^\odot le sous-espace de G' sur lequel Q^* est fortement continu. On a (Ceci est valable dans n'importe quel espace de Banach, même si on ne l'énonce que pour G ici) :

Proposition 18 [VN] G^\odot est un sous-espace fermé de G' , invariant par Q^* , et w^* -dense dans G' .

La restriction Q^\odot de Q^* à G^\odot est un semi-groupe de contractions fortement continu.

Soient A et A^\odot les générateurs forts de Q et Q^\odot , A^* l'adjoint de A , B le générateur w^* de Q^* . On a alors les résultats suivants:

Proposition 19 [VN] $B = A^*$; $D(A^\odot) = \{g \in D(A^*) \mid A^*g \in G^\odot\}$ et $A^\odot g = A^*g$ sur $D(A^\odot)$.

Notons qu'en conséquence $D(A^\odot)$ est w^* -dense dans G' , et qu'on a $G^\odot = \overline{D(A^*)}$.

Rappelons maintenant la caractérisation des générateurs infinitésimaux des semi-groupes de contractions qui sont de plus positifs sur un espace de fonctions continues sur un compact $C(K)$:

Proposition 20 [NR] Soit C un opérateur linéaire à domaine dense de $C(K)$ qui vérifie:

(i) (principe du maximum) $\forall f \in D(C), \forall z$ maximum de $f, (Cf)(z) \leq 0$.

Alors C est fermable. Si de plus

(ii) $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(C - \lambda I)D(C)$ est dense dans $C(K)$

alors \overline{C} est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction positif sur $C(K)$.

Réciproquement, si C est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction positif sur $C(K)$, alors (i) est vérifié et $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(C - \lambda I)D(C) = C(K)$.

On remarque que G est isométrique à l'espace $C([0, \infty])$ muni de la norme uniforme via

$$\begin{aligned} C([0, \infty]) &\rightarrow G \\ f &\mapsto (1 + Id) f \end{aligned}$$

On en déduit que les pré-générateurs des semi-groupes de contractions qui sont de plus positifs sur G sont les opérateurs linéaires C à domaine dense qui vérifient (ii) (avec G remplaçant $C(K)$) et le principe suivant du maximum:

$$(i)' \quad \forall g \in D(C), \forall x \in [0, \infty] \quad \text{maximum de } \frac{g}{1 + Id}, \frac{(Cg)(x)}{1 + x} \leq 0. \quad (4.2)$$

4.2 Construction de \widehat{A} à partir de A .

Q est maintenant un semi-groupe positif fortement continu sur G , markovien et martingalien (donc de contractions, comme on l'a déjà dit).

On lui associe comme ci-dessus les opérateurs A, A^*, A^\odot, B . Pour plus de clarté on distingue A^* et B . D'après ce qui précède:

$$\exists \lambda \in R \text{ tel que } (A^* - \lambda I) D(A^\odot) = (A^\odot - \lambda I) D(A^\odot) = G^\odot$$

et en particulier

$$\exists \lambda \in R \text{ tel que } (A^* - \lambda I) D(A^\odot) \text{ est } w^* - \text{dense dans } G' \quad (4.3)$$

sachant qu'aussi

$$D(A^\odot) \text{ est } w^* - \text{dense dans } G'$$

On rappelle qu'on identifie G' à $E \times R^2$, et qu'on note $\langle\langle \cdot \rangle\rangle$ la dualité entre G' et G .

On a alors:

$$\begin{aligned} \forall b \in G', \exists! (b_0, b_m, b_\infty) \in R \times E \times R \text{ tel que} \\ \forall g \in G \quad \langle\langle b, g \rangle\rangle = \langle b_m, g \rangle + b_0 g_0 + b_\infty g_\infty \end{aligned}$$

où $\langle \rangle$ désigne la dualité mesure-fonction usuelle.

Definition 2 On note $\tilde{T} : G' \rightarrow \tilde{G}$ l'application qui à b associe

$$\tilde{T}b = \left(y \mapsto \int b_m(dz) (z - y)^+ \right)$$

et $T : G' \rightarrow \tilde{G}$ l'application

$$Tb = \left(y \mapsto \int b_m(dz) (y - z)^+ \right)$$

On remarque $(\tilde{T}b)_0 = \langle b_m, Id \rangle$, $(\tilde{T}b)_\infty = 0$, $(Tb)_0 = 0$, $(Tb)_\infty = \langle b_m, 1 \rangle$.

Soit $b \in D(B)$. On a à cause des hypothèses de Markov et de martingale:

$$\langle\langle Bb, 1 \rangle\rangle = \langle\langle Bb, Id \rangle\rangle = 0$$

et compte tenu de $(x - \cdot)^+ - (\cdot - x)^+ = x - \cdot$.

$$\langle\langle Bb, (x - \cdot)^+ \rangle\rangle = \langle\langle Bb, (\cdot - x)^+ \rangle\rangle$$

On remarque que $x \mapsto \langle\langle Bb, (x - \cdot)^+ \rangle\rangle$ est C^0 . De plus:

$$\langle\langle Bb, (x - \cdot)^+ \rangle\rangle = \langle\langle (Bb)_m, (x - \cdot)^+ \rangle\rangle + (Bb)_0 x$$

et par convergence dominée:

$$\langle\langle Bb, (x - \cdot)^+ \rangle\rangle \rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow 0^+$$

$$\frac{\langle\langle Bb, (x - \cdot)^+ \rangle\rangle}{x} \rightarrow \langle (Bb)_m, 1 \rangle + (Bb)_0 = \langle\langle Bb, 1 \rangle\rangle = 0 \text{ quand } x \rightarrow \infty$$

Définissons maintenant un opérateur $C : \tilde{T}D(B) + \mathbf{R} + \mathbf{R} Id \subset G \rightarrow G$ par:

$$C(\tilde{T}b + \alpha + \beta Id) = \langle\langle Bb, (x - \cdot)^+ \rangle\rangle$$

C est bien défini, d'évidence linéaire, et s'annule sur les fonctions affines. On a aussi:

Lemme 13 C est de domaine dense, ie $\tilde{T}D(B) + \mathbf{R} + \mathbf{R} Id$ est dense dans G .

▷ En effet, soit $u \in G'$ tel que

$$\langle\langle u, \tilde{T}D(B) + \mathbf{R} + \mathbf{R} Id \rangle\rangle = 0$$

soit

$$\forall b \in D(B), (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$$

$$\langle\langle u, \tilde{T}b + \alpha + \beta Id \rangle\rangle = 0$$

$$\langle u_m, \tilde{T}b \rangle + u_0(\tilde{T}b)_0 + \langle\langle u, \alpha + \beta Id \rangle\rangle = 0$$

d'où

$$\langle u_m, \tilde{T}b \rangle + u_0(\tilde{T}b)_0 = 0$$

et

$$\langle\langle u, \alpha + \beta Id \rangle\rangle = 0$$

Soit encore

$$\langle b_m, Tu \rangle + u_0 \langle b_m, Id \rangle = 0$$

et

$$\langle u_m, 1 \rangle + u_0 = \langle u_m, Id \rangle + u_\infty = 0 \tag{4.4}$$

D'où

$$\langle b_m, Tu \rangle - \langle u_m, 1 \rangle \langle b_m, Id \rangle = 0$$

soit

$$\langle \langle b, Tu \rangle \rangle - b_\infty \langle u_m, 1 \rangle - \langle b_m, Id \rangle \langle u_m, 1 \rangle = 0$$

soit

$$\langle \langle b, Tu - \langle u_m, 1 \rangle Id \rangle \rangle = 0$$

et par densité w^* de $D(B) = D(A^*) \supset D(A^\circ)$ dans G'

$$Tu = \langle u_m, 1 \rangle Id$$

Mais ceci n'est possible que pour la fonction nulle, et donc

$$u_m = 0$$

et par (4.4)

$$u_0 = 0 \text{ et } u_\infty = 0$$

D'où le résultat, par le théorème de Hahn-Banach. \triangleleft

Voyons maintenant:

Lemme 14 *Soit λ tel qu'on ait (4.3). Alors $(C - \lambda I) (\tilde{T}D(A^\circ) + R + RId)$ est dense dans G .*

\triangleright Supposons l'existence de $u \in G'$ tel que

$$\forall b \in D(A^\circ), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

$$\langle \langle u, (C - \lambda Id) (\tilde{T}b + \alpha + \beta Id) \rangle \rangle = 0$$

soit

$$\langle\langle u, C\tilde{T}b \rangle\rangle = \lambda \langle\langle u, (\tilde{T}b + \alpha + \beta Id) \rangle\rangle$$

soit

$$\langle\langle u, C\tilde{T}b \rangle\rangle = \lambda \langle\langle u, \tilde{T}b \rangle\rangle$$

et

$$\langle\langle u, \alpha + \beta Id \rangle\rangle = 0$$

On a alors d'après ce qui précède

$$\langle\langle u, \tilde{T}b \rangle\rangle = \langle\langle b, Tu - \langle u_m, 1 \rangle Id \rangle\rangle$$

Mais

$$\begin{aligned} & \langle\langle u, C\tilde{T}b \rangle\rangle \\ &= \langle u_m, C\tilde{T}b \rangle \\ &= \langle u_m(dx), \langle\langle Bb, (x - \cdot)^+ \rangle\rangle \rangle \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \langle u_m(dx), \langle\langle Bb, (x - \cdot)^+ \rangle\rangle \rangle \\ &= \langle u_m(dx), \langle\langle Bb, (\cdot - x)^+ \rangle\rangle \rangle \\ &= \langle\langle Bb, \langle u_m(dx), (\cdot - x)^+ \rangle \rangle \rangle \end{aligned}$$

soit

$$\langle\langle u, C\tilde{T}b \rangle\rangle = \langle\langle Bb, Tu \rangle\rangle$$

Compte tenu encore de

$$\langle\langle Bb, Id \rangle\rangle = 0$$

on obtient

$$\langle\langle u, C\tilde{T}b \rangle\rangle = \langle\langle Bb, Tu - \langle u_m, 1 \rangle Id \rangle\rangle$$

et finalement

$$\langle\langle u, C\tilde{T}b \rangle\rangle = \lambda \langle\langle u, \tilde{T}b \rangle\rangle$$

se réécrit

$$\langle\langle Bb, Tu - \langle u_m, 1 \rangle Id \rangle\rangle = \lambda \langle\langle b, Tu - \langle u_m, 1 \rangle Id \rangle\rangle$$

soit

$$\langle\langle (B - \lambda Id) b, Tu - \langle u_m, 1 \rangle Id \rangle\rangle = 0$$

et l'on conclut comme plus haut, en utilisant cette fois la densité w^* de $(B - \lambda Id) D(A^\odot) = (A^* - \lambda Id) D(A^\odot) \triangleleft$

La dernière étape est:

Lemme 15 *Si Q vérifie (Conv), C vérifie le principe du maximum (4.2).*

▷ On a

$$\begin{aligned} C(\tilde{T}b)(x) &= \langle\langle Bb, (x - \cdot)^+ \rangle\rangle \\ &= \langle\langle Bb, (\cdot - x)^+ \rangle\rangle \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \left\langle \left\langle \frac{(Q_t^* - Id)b, (\cdot - x)^+}{t} \right\rangle \right\rangle \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \left\langle \left\langle b, \frac{(Q_t - Id)(\cdot - x)^+}{t} \right\rangle \right\rangle \end{aligned}$$

Notons

$$a_t^x(y) = \frac{(Q_t - Id)(\cdot - x)^+[y]}{t} = \frac{C_Q(y, x; t) - (y - x)^+}{t}$$

D'après (2.5) et (2.6)

$$\frac{a_t^x(y)}{y} \rightarrow 0 \text{ quand } y \rightarrow \infty \text{ et } a_t^x(y) \rightarrow 0 \text{ quand } y \rightarrow 0^+$$

D'où

$$\begin{aligned} &\left\langle \left\langle b, \frac{(Q_t - Id)(\cdot - x)^+}{t} \right\rangle \right\rangle \\ &= \langle\langle b, a_t^x(\cdot) \rangle\rangle \\ &= \langle\langle b_m, a_t^x(\cdot) \rangle\rangle \end{aligned}$$

Utilisons maintenant les expressions

$$C_Q(y, x; t) = \int \widehat{Q}(x, dz; t)(y - z)^+ + y [1 - \int \widehat{Q}(x, dz; t)]$$

et

$$(y - x)^+ = \int \delta_x(dz)(y - z)^+$$

D'où

$$\begin{aligned} & C_Q(y, x; t) - (y - x)^+ \\ &= \int \widehat{Q}(x, dz; t)(y - z)^+ - \int \delta_x(dz)(y - z)^+ + y [1 - \int \widehat{Q}(x, dz; t)] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & t \langle b_m, a_t^x(\cdot) \rangle \\ &= \langle b_m, \int [\widehat{Q}(x, dz; t) - \delta_x(dz)](\cdot - z)^+ \rangle + \langle b_m, Id [1 - \int \widehat{Q}(x, dz; t)] \rangle \\ &= \int [\widehat{Q}(x, dz; t) - \delta_x(dz)] \langle b_m, (\cdot - z)^+ \rangle + [1 - \int \widehat{Q}(x, dz; t)] \langle b_m, Id \rangle \end{aligned}$$

Mais

$$\langle b_m, (\cdot - z)^+ \rangle = \widetilde{T}b(z)$$

et donc

$$\begin{aligned} & t \langle b_m, a_t^x(\cdot) \rangle \\ &= \int [\widehat{Q}(x, dz; t) - \delta_x(dz)] \widetilde{T}b(z) + [1 - \int \widehat{Q}(x, dz; t)] \langle b_m, Id \rangle \\ &= \int \widehat{Q}(x, dz; t) \widetilde{T}b(z) - \widetilde{T}b(x) + [1 - \int \widehat{Q}(x, dz; t)] \langle b_m, Id \rangle \end{aligned}$$

Soit maintenant α, β réels fixés et x tel que

$$\forall z \in [0, \infty]$$

$$\frac{\widetilde{T}b(z) + \alpha + \beta z}{1 + z} \leq \frac{\widetilde{T}b(x) + \alpha + \beta x}{1 + x}$$

En particulier on a pour $z = 0$

$$\begin{aligned} (\tilde{T}b)_0 + \alpha &\leq \frac{\tilde{T}b(x) + \alpha + \beta x}{1+x} \\ \Leftrightarrow \langle b_m, Id \rangle + \alpha &\leq \frac{\tilde{T}b(x) + \alpha + \beta x}{1+x} \end{aligned} \quad (4.5)$$

et pour $z = \infty$

$$\begin{aligned} (\tilde{T}b)_\infty + \beta &\leq \frac{\tilde{T}b(x) + \alpha + \beta x}{1+x} \\ \Leftrightarrow \beta &\leq \frac{\tilde{T}b(x) + \alpha + \beta x}{1+x} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Réécrivons maintenant

$$\begin{aligned} &t \langle b_m, a_t^x(\cdot) \rangle \\ = &\int \hat{Q}(x, dz; t) (1+z) \left(\frac{\tilde{T}b(z) + \alpha + \beta z}{1+z} - \frac{\tilde{T}b(x) + \alpha + \beta x}{1+x} \right) \\ &- \int \hat{Q}(x, dz; t) (\alpha + \beta z) - \tilde{T}b(x) + \frac{\tilde{T}b(x) + \alpha + \beta x}{1+x} \int \hat{Q}(x, dz; t) (1+z) \\ &+ [1 - \int \hat{Q}(x, dz; t)] \langle b_m, Id \rangle \end{aligned}$$

On sait que

$$\int \hat{Q}(x, dz; t) (1+z) \left(\frac{\tilde{T}b(z) + \alpha + \beta z}{1+z} - \frac{\tilde{T}b(x) + \alpha + \beta x}{1+x} \right) \leq 0$$

Montrons que le terme qui reste est aussi négatif:

$$\begin{aligned} &- \int \hat{Q}(x, dz; t) (\alpha + \beta z) - \tilde{T}b(x) + \frac{\tilde{T}b(x) + \alpha + \beta x}{1+x} \int \hat{Q}(x, dz; t) (1+z) \\ &+ [1 - \int \hat{Q}(x, dz; t)] \langle b_m, Id \rangle \leq 0 \\ \Leftrightarrow &\frac{\tilde{T}b(x) + \alpha + \beta x}{1+x} [\int \hat{Q}(x, dz; t) (1+z) - (1+x)] + (\alpha + \beta x) \\ &- \int \hat{Q}(x, dz; t) (\alpha + \beta z) + [1 - \int \hat{Q}(x, dz; t)] \langle b_m, Id \rangle \leq 0 \\ \Leftrightarrow &\left[\frac{\tilde{T}b(x) + \alpha + \beta x}{1+x} - (\langle b_m, Id \rangle + \alpha) \right] [\int \hat{Q}(x, dz; t) - 1] \\ &+ \left[\frac{\tilde{T}b(x) + \alpha + \beta x}{1+x} - \beta \right] [\int \hat{Q}(x, dz; t) z - x] \leq 0 \end{aligned}$$

Ce qui est vrai compte tenu de (4.5) et (4.6) et de

$$\begin{aligned} \int \widehat{Q}(x, dz; t) &\leq 1 \\ \int \widehat{Q}(x, dz; t) z &\leq x \end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned} &\frac{C(\widetilde{T}b)(x)}{1+x} \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{\left\langle \left\langle b, \frac{(Q_t - Id)}{t} (\cdot - x)^+ \right\rangle \right\rangle}{1+x} \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{\langle b_m, a_t^x(\cdot) \rangle}{1+x} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

d'où le résultat. \triangleleft

Proposition 21 *Soit Q markovien, martingalien, positif et fortement continu sur G qui vérifie (Conv) et A^* le dual du générateur infinitésimal de Q . L'opérateur*

$$\begin{aligned} C : \widetilde{T}D(A^*) + R + R Id \subset G &\rightarrow G \\ \widetilde{T}b + \alpha + \beta Id &\mapsto \left(x \mapsto \left\langle \left\langle A^*b, (x - \cdot)^+ \right\rangle \right\rangle \right) \end{aligned}$$

est un pré-générateur de semi-groupe de contractions positif sur G .

4.3 Théorème de caractérisation.

La proposition suivante montre que le semi-groupe associé à C est bien \widehat{Q} .

Proposition 22 *Soit Q markovien, martingalien, positif et fortement continu sur G et A^* le dual du générateur infinitésimal de Q . Supposons que l'opérateur*

$$\begin{aligned} C : \widetilde{T}D(A^*) + R + R Id \subset G &\rightarrow G \\ \widetilde{T}b + \alpha + \beta Id &\mapsto \left(x \mapsto \left\langle \left\langle A^*b, (x - \cdot)^+ \right\rangle \right\rangle \right) \end{aligned}$$

soit un prégénérateur de semi-groupe de contractions positif sur G . Alors Q vérifie (Conv) et le semi-groupe associé à \overline{C} est \widehat{Q} .

▷ Soit R le semi-groupe associé à \overline{C} . Posons:

$$P_R(z, x; t) = R_t(x - \cdot)^+(z)$$

Soit $b \in D(A^*)$, $z \in \mathbf{R}_*^+$ fixé, et

$$\varphi(t) = \langle\langle b, C_Q(\cdot, z; t) \rangle\rangle = \langle\langle b_x, Q_t(\cdot - z)^+(x) \rangle\rangle$$

(le x est là pour clarifier la situation).

Alors

$$\varphi'(t) = \langle\langle A^*b, C_Q(\cdot, z; t) \rangle\rangle$$

Soit

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \langle\langle b, P_R(z, \cdot; t) \rangle\rangle \\ &= \langle\langle b_x, R_t(x - \cdot)^+(z) \rangle\rangle \\ &= R_t[\tilde{T}b + b_\infty 1](z) \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= R_t[\langle\langle (A^*b)_x, (x - \cdot)^+ \rangle\rangle](z) \\ &= \langle\langle A^*b, P_R(z, \cdot; t) \rangle\rangle \end{aligned}$$

Posons maintenant

$$h(t) = C_Q(\cdot, z; t) - P_R(z, \cdot; t)$$

(fonctions à valeurs dans le Banach G).

Evidemment $h(0) = 0$ et l'on a

$$\forall b \in D(A^*) \quad \frac{d}{dt} \langle\langle b, h(t) \rangle\rangle = \langle\langle A^*b, h(t) \rangle\rangle$$

Regardons la fonction:

$$s \in [0, t] \mapsto Q_{t-s}h(s)$$

Elle est nulle en 0 et

$$\frac{d}{ds} \langle \langle b, Q_{t-s}h(s) \rangle \rangle = -\langle \langle A^*b, Q_{t-s}h(s) \rangle \rangle + \langle \langle A^*b, Q_{t-s}h(s) \rangle \rangle = 0$$

d'où

$$\langle \langle b, h(t) \rangle \rangle = 0$$

et

$$h(t) = 0$$

On a donc

$$C_Q(., z; t) = P_R(z, .; t)$$

et l'on aurait pu montrer aussi

$$P_Q(., z; t) = C_R(z, .; t)$$

D'où $R = \hat{Q} \triangleleft$

On déduit de cette proposition et de la partie précédente:

Theoreme 16 *Soit Q markovien, martingalien, positif et fortement continu sur G et A^* le dual du générateur infinitésimal de Q . Q propage la convexité si et seulement si l'opérateur*

$$C : \tilde{T}D(A^*) + R + R Id \subset G \rightarrow G \\ \tilde{T}b + \alpha + \beta Id \mapsto \left(x \mapsto \langle \langle A^*b, (x - .)^+ \rangle \rangle \right)$$

vérifie le principe du maximum (4.2) et alors $\overline{C} = \hat{A}$.

4.4 Une décomposition type Lévy-Kintchine.

On suppose, dans tout ce paragraphe, que Q est un semi-groupe markovien, martingalien, positif et fortement continu sur G , de générateur A .

Notant dx la mesure de Lebesgue sur R_+^* et $\mathcal{D} = C_\infty^0(R_+^*)$, on suppose en outre

$$\mathcal{M} = \{\mu_f / \mu_f(dx) = f(x)dx, f \in \mathcal{D}\} \subset D(A^*)$$

On cherche à donner une forme de représentation de A (de A^* en fait) caractérisant la propagation de la convexité.

Theoreme 17 *On considère les conditions suivantes:*

(P1) *Pour tout $x > 0$ il existe un réel $\sigma(x) \geq 0$ et une fonction a^x de R_+^* dans R_+ , convexe croissante sur $]0, x[$ avec limite nulle en 0, convexe décroissante sur $]x, \infty[$, localement intégrable sur R_+^* , tels qu'on ait*

$$\forall f \in \mathcal{D}$$

$$\langle\langle A^* \mu_f, (\cdot - x)^+ \rangle\rangle = \sigma(x) f(x) + \int f(y) a^x(y) dy$$

(P2) *A^* est la fermeture $*$ -faible de $A|_{\mathcal{M}}$.*

Alors, si Q vérifie (Conv) on a (P1). Si Q vérifie (P1) et (P2) alors Q vérifie (Conv) et \hat{A} est la fermeture de l'opérateur C défini sur $\tilde{T}\mathcal{M} + R + RId$ par

$$CF(z) = \sigma(z) F''(z) + \int F''(y) a^z(y) dy$$

▷ On a pour x fixé

$$\begin{aligned} \langle\langle A^* \mu_f, (\cdot - x)^+ \rangle\rangle &= \lim_{t \downarrow 0} \left\langle \left\langle \mu_f, \frac{(Q_t - Id)}{t} (\cdot - x)^+ \right\rangle \right\rangle \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \int f(y) \frac{Q_t(\cdot - x)^+[y] - (y - x)^+}{t} dy \end{aligned}$$

Mais si Q vérifie (Conv) $Q_t(\cdot - x)^+[y] - (y - x)^+ \geq 0$ et $f \mapsto \langle\langle A^* \mu_f, (\cdot - x)^+ \rangle\rangle$ est

une distribution positive sur R_+^* , ie une mesure de Radon positive qu'on note v_x . De plus

$$y \mapsto \frac{Q_t(\cdot - x)^+[y] - (y - x)^+}{t} = a_t^x(y)$$

est convexe sur $]x, \infty[$ et $]0, x[$. $a_t^x(\cdot)$ converge au sens des distributions sur R_+^* vers v_x , $a_t^{x''}(\cdot)$ vers la dérivée seconde distribution v_x'' de v_x , $a_t^{x''}(\cdot)$ est une mesure de Radon positive sur $R_+^* \setminus \{x\}$, v_x'' aussi et v_x est une fonction convexe sur $]0, x[$ et $]x, \infty[$ qu'on note $a^x(\cdot)$. $a_t^x(\cdot)$ est positive, décroissante sur $]x, \infty[$ et croissante sur $]0, x[$ et $a^x(\cdot)$ aussi. De $a_t^x(0^+) = 0$ on déduit aisément $a^x(0^+) = 0$. v_x étant de Radon $a^x(\cdot)$ est intégrable au voisinage de x .

Enfin $f \mapsto v_x(f) - \int f(y) a^x(y) dy$ est une distribution positive concentrée en $\{x\}$ et par suite de la forme $\sigma(x) \delta_x$ avec $\sigma(x) \geq 0$.

Si Q vérifie (P1) et (P2) soit l'opérateur C du théorème. Montrons qu'il satisfait le principe du maximum (4.2).

Soit $(\alpha, \beta) \in R^2$, $f \in \mathcal{D}$ et $F = \tilde{T}\mu_f + \alpha + \beta Id$. Il faut vérifier $\frac{CF(x)}{1+x} \leq 0$ pour $x \in [0, \infty]$ tel que $\forall z \in [0, \infty]$

$$\frac{F(x)}{1+x} \geq \frac{F(z)}{1+z} \quad (4.7)$$

On a $CF(x) = \left\langle \left\langle A^* \mu_{F''}, (\cdot - x)^+ \right\rangle \right\rangle$ et l'on a vu

$$\begin{aligned} \lim_{x \uparrow \infty} \left\langle \left\langle A^* \mu_{F''}, \frac{(\cdot - x)^+}{1+x} \right\rangle \right\rangle &= 0 \\ \lim_{x \downarrow 0} \left\langle \left\langle A^* \mu_{F''}, (\cdot - x)^+ \right\rangle \right\rangle &= 0 \end{aligned}$$

et $\frac{CF(x)}{1+x} = 0$ pour $x = 0$ ou $x = \infty$. Pour $x \in R_+^*$ on va utiliser l'écriture:

Pour $y > x$

$$a^x(y) = a^x(\infty) + \int_y^\infty (z - y) a^{x''}(dz)$$

Pour $0 < y < x$

$$a^x(y) = a^{x'}(0^+) y + \int_{0^+}^y (y-z) a^{x''}(dz)$$

(ceci à cause de $a^x(0^+) = 0$).

D'où, la locale intégrabilité de a^x permettant d'utiliser Fubini:

$$\begin{aligned} CF(x) &= \sigma(x) f(x) + \int f(y) a^x(y) dy \\ &= \sigma(x) F''(x) + \int_{y < x} [a^{x'}(0^+) y + \int_{0^+}^y (y-z) a^{x''}(dz)] F''(y) dy \\ &\quad + \int_{y > x} [a^x(\infty) + \int_y^\infty (z-y) a^{x''}(dz)] F''(y) dy \\ &= \sigma(x) F''(x) + \int_{\mathbb{R}_+^* \setminus \{x\}} a^{x''}(dz) [F(z) - F(x) - (z-x) F'(x)] \\ &\quad - a^x(\infty) [F'(x) - \beta] + a^{x'}(0^+) [F(0) - F(x) + x F'(x)] \end{aligned}$$

Mais bien sûr la condition (4.7) donne au voisinage de x

$$\left(\frac{F(z)}{1+z} \right)'_{z=x} = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{F(z)}{1+z} \right)''_{z=x} \leq 0$$

soit

$$F'(x) = \frac{F(x)}{1+x} \quad \text{et} \quad F''(x) \leq 0$$

et en $z = \infty$

$$\begin{aligned} \frac{F(x)}{1+x} &\geq \lim_{z \uparrow \infty} \frac{F(z)}{1+z} \\ &= \beta \end{aligned}$$

On a donc $F''(x) \leq 0$ et $F'(x) - \beta \geq 0$ et aussi pour $z \geq 0$

$$\begin{aligned}
& F(z) - F(x) - (z-x)F'(x) \\
&= \frac{F(z)}{1+z} (1+z) - F(x) - (z-x)F'(x) \\
&\leq \frac{F(x)}{1+x} (1+z) - F(x) - (z-x)F'(x) \\
&= F(x) \left[\frac{(1+z)}{1+x} - 1 - \frac{(z-x)}{1+x} \right] \\
&= F(x) \left[\frac{(1+z) - (1+x) - (z-x)}{1+x} \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Finalement

$$CF(x) \leq 0$$

Enfin (P2) entraîne que la fermeture \overline{C} de C est une extension de l'opérateur construit dans le paragraphe précédent. Mais \overline{C} satisfait aussi le principe du maximum, d'où le résultat via le théorème 16. \triangleleft

4.5 Cas des générateurs bornés.

On suppose que Q est un semi-groupe markovien, martingalien, positif et fortement continu sur G , de générateur A , qui vérifie (Conv).

Si $F \subset D(A)$ on pose pour tout $x \in R_+^*$

$$a(x, \cdot) \stackrel{G}{=} \lim_{t \downarrow 0} \frac{Q_t(\cdot - x)^+[\cdot] - (\cdot - x)^+}{t}$$

D'après ce qui précède $a(x, \cdot)$ est nulle en 0, convexe croissante sur $[0, x]$, convexe décroissante positive sur $[x, \infty[$ et continue au point x (les fonctions de G sont continues).

Si de plus $F \subset D(\widehat{A})$ les fonctions $a(\cdot, z)$, $z \in R_+^*$ vérifient les mêmes propriétés par dualité call-put.

On suppose dorénavant A borné. Alors $F \subset D(A) = G$.

A^* est aussi borné et par la construction du premier paragraphe $D(\hat{A}) \supset \tilde{G} \supset F$.

Soit $f \in \mathcal{D}$. Alors $f(\cdot) = \int (\cdot - y)^+ f''(y) dy$, f est limite dans G des fonctions $\int (\cdot - y)^+ f''\left(\frac{kT}{N}\right) 1\left(y \in \left[\frac{kT}{N}, \frac{(k+1)T}{N}\right]\right) dy$ pour $\text{supp}(f) \subset [0, T]$ et par continuité de A on a $Af(x) = \int a(y, x) f''(y) dy = \langle f(\cdot), a''(\cdot, x) \rangle$ au sens des distributions de R_+^* .

D'où

$$Af(x) = \left\langle \frac{f(\cdot)}{(1+\cdot)}, (1+\cdot) a''(\cdot, x) \right\rangle$$

et

$$\begin{aligned} \|Af\| &\leq \|A\| \|f\| \\ \Leftrightarrow \sup_{x \in R_+^*} \left| \left\langle \frac{f(\cdot)}{(1+\cdot)}, \frac{(1+\cdot) a''(\cdot, x)}{(1+x)} \right\rangle \right| &\leq \|A\| \sup_{z \in R_+^*} \left| \frac{f(z)}{(1+z)} \right| \end{aligned}$$

Mais $f \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \frac{f}{1+Id} \in \mathcal{D}$ et finalement

$$\forall g \in \mathcal{D} \sup_{x \in R_+^*} \left| \left\langle g(\cdot), \frac{(1+\cdot) a''(\cdot, x)}{(1+x)} \right\rangle \right| \leq \|A\| \sup_{z \in R_+^*} |g(z)|$$

On en tire:

• Pour tout $x \in R_+^*$:

$\frac{(1+\cdot) a''(\cdot, x)}{(1+x)}$ est une mesure de Radon sur R_+^* ; mais

$$\int_{a^+}^{b^+} (1+u) a''(du, x) = [(1+u) a'(u, x) - a(u, x)]_a^b$$

et en faisant $a = x$, $b > x$ puis $a < x$, $b \uparrow x$ on obtient que $a'(x^+, x)$ et $a'(x^-, x)$ sont finies.

On a aussi $\lim_{z \uparrow \infty} \int_{x^+}^{z^+} (1+u) a''(du, x) < \infty$, et l'on sait déjà $a(z, x) \downarrow a(\infty, x)$ et $-a'(z, x) \downarrow 0$. On obtient donc $\exists \lim_{z \uparrow \infty} z a'(z, x)$. Cette limite est nécessairement nulle, sinon $a(z, x)$ serait en $\log(z)$ à l'infini.

• Le fait que la majoration est uniforme en x donne $\sup_{x \in R_+^*} a'(x^-, x) < \infty$, $\sup_{x \in R_+^*} -a'(x^+, x) < \infty$.

Réciproquement, soit une famille de fonctions a de R_+^{*2} dans R^+ qui vérifie:

(i) Pour tout $x \in R_+^*$ $a(x, \cdot)$ et $a(\cdot, x)$ sont nulles en 0, convexes croissantes sur $[0, x]$, convexes décroissantes positives sur $[x, \infty[$ et continues au point x .

(ii) $\sup_{x \in R_+^*} a'(x^-, x) < \infty$, $\sup_{x \in R_+^*} -a'(x^+, x) < \infty$

(iii) Pour tout $x \in R_+^*$ $\lim_{z \uparrow \infty} z a'(z, x) = 0$.

A cause de (i) et (ii) pour tout $x \in R_+^*$ $a''(\cdot, x)$ est une mesure. Soit l'opérateur A défini sur $\mathcal{D} + R + RId$ par

$$Af(x) = \int f(y) a''(dy, x) + f_0 a'(0^+, x) + f_\infty a(\infty, x)$$

Alors $Af(x) = \int a(y, x) f''(y) dy$ et l'on vérifie $Af \in G$, $Af_0 = Af_\infty = 0$ et aussi $A(R + RId) = 0$.

De plus

$$Af(x) = (1+x) \left\langle \frac{f(\cdot)}{(1+\cdot)}, \frac{(1+\cdot) a''(\cdot, x)}{(1+x)} \right\rangle + f_0 a'(0^+, x) + f_\infty a(\infty, x)$$

et

$$\begin{aligned} & \left| \frac{Af(x)}{(1+x)} \right| \\ & \leq \left| \left\langle \frac{f(\cdot)}{(1+\cdot)}, \frac{(1+\cdot) a''(\cdot, x)}{(1+x)} \right\rangle \right| + \frac{a'(0^+, x)}{(1+x)} |f_0| + \frac{a(\infty, x)}{(1+x)} |f_\infty| \\ & \leq \frac{1}{(1+x)} \left[\int_{0^+}^{x^-} \left| \frac{f(u)}{(1+u)} \right| (1+u) a''(du, x) + \int_{x^+}^{\infty} \left| \frac{f(u)}{(1+u)} \right| (1+u) a''(du, x) \right] \\ & \quad + \left| \frac{f(x)}{(1+x)} \right| [a'(x^-, x) - a'(x^+, x)] + \frac{a'(0^+, x)}{(1+x)} |f_0| + \frac{a(\infty, x)}{(1+x)} |f_\infty| \\ & \leq \|f\| \left[\frac{\int_{0^+}^{x^-} (1+u) a''(du, x) + \int_{x^+}^{\infty} (1+u) a''(du, x)}{(1+x)} + a'(x^-, x) - a'(x^+, x) \right] \\ & \quad + \frac{a'(0^+, x)}{(1+x)} + \frac{a(\infty, x)}{(1+x)} \\ & = 2 \|f\| [a'(x^-, x) - a'(x^+, x)] \end{aligned}$$

Où l'on a utilisé (iii). A cause de (ii) A s'étend à G tout entier.

Il reste à remarquer que A vérifie le principe du maximum à cause de l'hypothèse (i), comme on l'a vu plus haut. Sa fermeture aussi, et l'opérateur \bar{A} est donc un générateur infinitésimal borné de semi-groupe positif, markovien et martingalien de G propageant la convexité.

On a donc montré:

Proposition 23 *Une famille de fonctions a de R_+^{*2} dans R^+ définit un générateur infinitésimal borné d'un semi-groupe positif, markovien et martingalien de G propageant la convexité par*

$$A(\cdot - x)^+[y] = a(x, y)$$

si et seulement si les propriétés (i) (ii) (iii) sont vérifiées.

Remarque 18 *Les propriétés (ii) et (iii) ne sont pas symétriques en A et \hat{A} et l'on a de plus $G = D(\hat{A})$ si et seulement si*

$$\widehat{(ii)} \sup_{x \in R_+^*} a'_y(x, x^-) < \infty, \sup_{x \in R_+^*} -a'_y(x, x^+) < \infty$$

$$\widehat{(iii)} \text{ Pour tout } x \in R_+^* \lim_{z \uparrow \infty} z a'_y(x, z) = 0.$$

Chapter 5

EXEMPLES ET APPLICATIONS

5.1 Cas des semi-groupes de convolution.

Supposons que Q soit associé à un processus de Markov S strictement positif tel que

$$\forall s < t \quad S_t = S_s M_{s,t}$$

où $M_{s,t}$ est intégrable et indépendant de S_s .

Il est évident que la convexité se propage, et il s'agit d'explicitier le semi-groupe call-put dual. L'hypothèse martingale se traduit par

$$\forall s, t \quad E[M_{s,t}] = 1$$

Soit $m(dz; s, t)$ la loi de $M_{s,t}$ sur R_+^* .

Pour f mesurable positive

$$\begin{aligned} E[f(S_t) | S_s = x] &= E[f(xM_{s,t})] \\ &= \int m(da; s, t) f(xa) \\ &= \int (\tau_x * m)(dy; s, t) f(y) \end{aligned}$$

où $(\tau_x * m)$ est la loi image de m par $y \mapsto xy$. La loi conditionnelle S_t sachant S_s est $q(x, dy; s, t) = (\tau_x * m)(dy; s, t)$. En particulier

$$\begin{aligned} C_Q(x, z; s, t) &= \int_{y \geq z} q(x, dy; s, t) (y - z) dy \\ &= \int_{y \geq z} (\tau_x * m)(dy; s, t) (y - z) dy \end{aligned}$$

Posons $u = \frac{y}{x}$

$$C_Q(x, z; s, t) = \int_{u \geq \frac{z}{x}} m(du; s, t) (xu - z)$$

Et

$$\begin{aligned} \frac{\partial_d C_Q(x, z; s, t)}{\partial x} &= \int_{u \geq \frac{z}{x}} m(du; s, t) u \\ &= \int_{v \leq x} \frac{z}{v} (\rho_z * m)(dv; s, t) \end{aligned}$$

où $(\rho_z * m)$ est la loi image de m par $u \mapsto \frac{z}{u}$ et par suite

$$\frac{\partial^2 C_Q(dx, z; s, t)}{\partial x^2} = \frac{z}{x} (\rho_z * m)(dx; s, t)$$

Par hypothèse $(H0)'$ est vérifiée et d'après la proposition 7 on a $(Bords)$. Quid de $(Bords Dual)$?

$$\begin{aligned} &C_Q(x, z; s, t) - x \frac{\partial_d C_Q(x, z; s, t)}{\partial x} \\ &= \int_{u \geq \frac{z}{x}} m(du; s, t) (xu - z) - x \int_{u \geq \frac{z}{x}} m(du; s, t) u \\ &= - \int_{u \geq \frac{z}{x}} m(du; s, t) z \\ &= -z \int_{u \geq \frac{z}{x}} m(du; s, t) \end{aligned}$$

et $\int_{u \geq \frac{z}{x}} m(du; s, t) \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow \infty$, $(Bords Dual)$ est vérifiée.

Proposition 24 *Supposons que Q soit associé à un processus de Markov strictement*

positif S tel que:

$$\forall s < t \ S_t = S_s M_{s,t} \text{ avec } M_{s,t} \text{ intégrable, indépendant de } S_s \text{ et } E[M_{s,t}] = 1.$$

Soit $m(dz; s, t)$ la loi de $M_{s,t}$ sur R^{*+} .

Alors $q(x, dy; s, t) = (\tau_x * m)(dy; s, t)$ et $\hat{q}(z, dx; s, t) = \frac{z}{x} (\rho_z * m)(dx; s, t)$ où $(\tau_x * m)$ et $(\rho_z * m)$ sont les lois images de m par $y \mapsto xy$ et $y \mapsto \frac{z}{y}$.

A cause de $\int m(dz; s, t) = \int zm(dz; s, t) = 1$ on note

Corollaire 19 Les mesures $\frac{dx}{x}$ et $\frac{dx}{x^2}$ sont invariantes par Q .

Exemple 20 (Modèle de Black-Scholes).

Dans le cas de la diffusion exponentielle

$$dS_t = aS_t dB_t$$

on a

$$S_t = S_s \exp\left(a(B_t - B_s) - \frac{a^2}{2}(t - s)\right)$$

et l'on peut calculer explicitement m, Q, C_Q, \dots

Dans la suite, on notera

$$BS_a(x, y; t)$$

la fonction call correspondante.

Par la proposition 24 elle vérifie (Bords) et (Bords Dual) et par les propositions 24 et 9 elle est C^2 en x et en y .

On a en fait $\hat{Q} = Q$. On peut bien sûr le vérifier par un calcul direct. On peut aussi remarquer

$$\begin{aligned} & E[(S_t - y)^+ | S_s = x] \\ = & E\left[\frac{S_t}{S_s} \left(S_s - \frac{S_s}{S_t} y\right)^+ | S_s = x\right] \\ = & E\left[\exp\left(aB_{t-s} - \frac{a^2}{2}(t-s)\right) \left(x - \exp\left(-aB_{t-s} + \frac{a^2}{2}(t-s)\right) y\right)^+\right] \end{aligned}$$

Par le théorème de Girsanov, sous la probabilité $\tilde{P} = \exp\left(aB_{t-s} - \frac{a^2}{2}(t-s)\right) P$ (où P est la loi de S) $\tilde{B} = B. - \langle B, aB \rangle. = B. - a \int_0^t du$ est un MVB, $-aB_{t-s} + \frac{a^2}{2}(t-s) = -a(B_{t-s} - a(t-s)) - \frac{a^2}{2}(t-s) = -a\tilde{B}_{t-s} - \frac{a^2}{2}(t-s)$ d'où

$$\begin{aligned} & E \left[(S_t - y)^+ \mid S_s = x \right] \\ &= E^{\tilde{P}} \left[\left(x - y \exp \left(-a\tilde{B}_{t-s} - \frac{a^2}{2}(t-s) \right) \right)^+ \right] \\ &= E \left[\left(x - y \exp \left(aB_{t-s} - \frac{a^2}{2}(t-s) \right) \right)^+ \right] \\ &= E \left[(x - S_t)^+ \mid S_s = y \right] \end{aligned}$$

5.2 Un exemple à temps discret.

Soient 2 fonctions continues $\alpha_+, \alpha_- : R^{*+} \rightarrow R^{*+}$ telles que:

$$\begin{aligned} (i) \quad & \forall x \quad \alpha_+(x) \geq \alpha_-(x) \text{ et } \alpha_+(x) + \alpha_-(x) = 2x \\ (ii) \quad & \exists K_- > 0, K_+ < \infty \text{ tels que } \forall x \quad \alpha_+(x) < K_+ x \text{ et } \alpha_-(x) > K_- x \end{aligned} \tag{5.1}$$

Soit $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$ et l'opérateur $T_\lambda : C^0 \rightarrow C^0$

$$f \mapsto (x \mapsto T_\lambda f(x) = (1 - 2\lambda)f(x) + \lambda[f(\alpha_+(x)) + f(\alpha_-(x))])$$

Il est évident que T_λ est markovien, martingalien, et positif.

On a $T_\lambda(\cdot - y)^+(x) = x - y$ dès que $\alpha_-(x) \geq y$, ce qui ne pose pas de problème grâce à (ii), et $T_\lambda(\cdot - y)^+(x) = 0$ dès que $\alpha_+(x) \leq y$. T_λ vérifie (*Bords*), (*Bords Dual*).

On pose

$$Q_{n,n+p}f(x) = T_\lambda^p f(x)$$

et

$$C_Q(x, y; n, n+p) = Q_{n,n+p}(\cdot - y)^+(x)$$

Une condition suffisante pour la propagation de la convexité est:

$$\alpha_+ \text{ convexe}$$

En effet il suffit de montrer que les calls sont convexes, à cause de la parité call-put. Mais

$$\begin{aligned} T(\cdot - y)^+(x) &= (1 - 2\lambda)(x - y)^+ + \lambda(\alpha_+(x) - y)^+ + \lambda(\alpha_-(x) - y)^+ \\ &= 0 \text{ pour } \alpha_+(x) \leq y \\ &= \lambda(\alpha_+(x) - y) \text{ pour } x \leq y \leq \alpha_+(x) \\ &= (1 - 2\lambda)(x - y) + \lambda(\alpha_+(x) - y) \text{ pour } \alpha_-(x) \leq y \leq x \\ &= x - y \text{ pour } \alpha_-(x) \geq y \end{aligned}$$

est convexe sur chacun des intervalles, et de pente croissante (à cause de $(1 - 2\lambda)x + \lambda\alpha_+(x) = x - \lambda\alpha_-(x) \leq x$ pour l'avant-dernier intervalle).

Cette condition est-elle nécessaire?

Soit x tel que $x < \alpha_+(x)$ et y tel que $x < y < \alpha_+(x)$. Par continuité de α_+ il y a un intervalle V_x contenant x tel que $V_x < y < \alpha_+(V_x)$ et pour $z \in V_x$ $T(\cdot - y)^+(z) = \lambda(\alpha_+(z) - y)$; une première condition nécessaire est que α_+ soit convexe croissante sur un voisinage de chaque point x qui vérifie $x < \alpha_+(x)$.

Soit $z_{\min}(x) = \sup \{z < x / \alpha_+(z) = z\}$ si cet ensemble est non vide et 0 sinon (on notera $\alpha_+(0) = 0$ la limite de α_+ en 0), $z_{\max}(x) = \inf \{z > x / \alpha_+(z) = z\}$ si cet ensemble est non vide et ∞ sinon. Alors α_+ est convexe croissante sur $]z_{\min}(x), z_{\max}(x)[$. On a nécessairement $z_{\max}(x) = \infty$: en effet par convexité $\frac{\alpha_+(z) - \alpha_+(x)}{z - x} \leq \frac{\alpha_+(z_{\max}) - \alpha_+(x)}{z_{\max} - x}$ pour $z \in]z_{\min}(x), x[$, en particulier $\frac{\alpha_+(z_{\min}) - \alpha_+(x)}{z_{\min} - x} \leq \frac{\alpha_+(z_{\max}) - \alpha_+(x)}{z_{\max} - x}$ mais $\alpha_+(z_{\min}) = z_{\min}$ et pour $z_{\max}(x) < \infty$ on a $\alpha_+(z_{\max}) = z_{\max}$, d'où $\alpha_+(x)(z_{\min} - z_{\max}) \geq x(z_{\min} - z_{\max})$ qui contredit $z_{\min} < z_{\max}$ et $\alpha_+(x) > x$.

On a donc pour $z < z_{\min}(x)$ et $\alpha_+(z) > z$ $z_{\max}(z) = \infty$ et par suite $\alpha_+(z) = z$ pour

$z < z_{\min}(x)$.

Finalement α_+ est nécessairement convexe.

Proposition 25 *Soient 2 fonctions α_+, α_- continues qui vérifient (5.1), $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$ et*

$$\begin{aligned} T_\lambda : C^0 &\rightarrow C \\ f &\mapsto (x \mapsto T_\lambda f(x) = (1 - 2\lambda) f(x) + \lambda[f(\alpha_+(x)) + f(\alpha_-(x))]) \end{aligned}$$

T_λ propage la convexité si et seulement si α_+ est convexe.

Calculons la densité du semi-groupe call-put dual. α_+ et α_- sont nécessairement strictement croissantes, et α_+^{-1} et α_-^{-1} sont bien définies; α'_+ et α'_- désignent des dérivées à droites.

$$\begin{aligned} &\widehat{Q}(y, dx; n, n+1) \\ = &(1 - 2\lambda) \delta_y(dx) \\ &+ \lambda \alpha'_+ (\alpha_+^{-1}(y)) \delta_{\alpha_+^{-1}(y)}(dx) + \lambda 1(x > \alpha_+^{-1}(y)) \alpha''_+(dx) \\ &+ \lambda \alpha'_- (\alpha_-^{-1}(y)) \delta_{\alpha_-^{-1}(y)}(dx) + \lambda 1(x > \alpha_-^{-1}(y)) \alpha''_-(dx) \end{aligned} \tag{5.2}$$

Où l'on a en fait

$$\alpha''_+(dx) + \alpha''_-(dx) = 0$$

Vérifions par exemple

$$\int \widehat{Q}(y, dx; n, n+1) = 1$$

On a

$$\begin{aligned}
& \int \widehat{Q}(y, dx; n, n+1) \\
&= (1-2\lambda) + \lambda \alpha'_+ (\alpha_+^{-1}(y)) + \lambda \int_{x > \alpha_+^{-1}(y)} \alpha''_+ (dx) \\
&\quad + \lambda \alpha'_- (\alpha_-^{-1}(y)) + \lambda \int_{x > \alpha_-^{-1}(y)} \alpha''_- (dx) \\
&= (1-2\lambda) + \lambda \alpha'_+ (\alpha_+^{-1}(y)) + \lambda \alpha'_- (\alpha_-^{-1}(y)) \\
&\quad + \lambda \int_{\alpha_-^{-1}(y) \geq x > \alpha_+^{-1}(y)} \alpha''_+ (dx) \\
&= (1-2\lambda) + \lambda \alpha'_+ (\alpha_+^{-1}(y)) + \lambda \alpha'_- (\alpha_-^{-1}(y)) \\
&\quad + \lambda [\alpha'_+ (\alpha_-^{-1}(y)) - \alpha'_+ (\alpha_+^{-1}(y))] \\
&= (1-2\lambda) + \lambda [\alpha'_- (\alpha_-^{-1}(y)) + \alpha'_+ (\alpha_-^{-1}(y))]
\end{aligned}$$

et l'on conclut via $\alpha'_+ + \alpha'_- = 2$.

5.3 Le cas des diffusions.

Pour simplifier les notations, on se restreint aux cas homogène en temps.

Soit l' e.d.s.

$$dS_t = \sigma(S_t) S_t dB_t \tag{5.3}$$

On suppose dans toute la suite

- (I0)

$$\exists \alpha, \beta \quad 0 < \alpha \leq \sigma(\cdot) \leq \beta < \infty$$

et $\sigma(\cdot)$ mesurable.

5.3.1 Rappels.

Dans l'optique de donner des résultats aussi généraux que possibles, on prend comme point de départ la formulation solution au problème de martingales de [SV].

Le premier travail consiste à se ramener à une e.d.s. de type

$$dX_t = \overline{\sigma}(X_t) d\overline{B}_t + \overline{\mu}(X_t) dt \tag{5.4}$$

avec $\bar{\sigma}$ et $\bar{\mu}$ convenables, qui est l'objet étudié usuellement dans la littérature.

Soit $X_t = \ln(S_t)$. Par la formule d'Ito

$$\begin{aligned} dX_t &= \frac{dS_t}{S_t} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{S_t^2} d\langle S \rangle_t \right) \\ &= \sigma(S_t) dB_t + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{S_t^2} \sigma^2(S_t) S_t^2 dt \right) \\ &= \sigma(S_t) dB_t - \frac{1}{2} \sigma^2(S_t) dt \end{aligned}$$

et

$$dS_t = \sigma(S_t) S_t dB_t, \quad S_t = \exp(X_t)$$

\Leftrightarrow

$$dX_t = \sigma \circ \exp(X_t) dB_t - \frac{1}{2} [\sigma \circ \exp(X_t)]^2 dt, \quad X_t = \ln(S_t)$$

Sous (I0) $\sigma \circ \exp$ est mesurable, uniformément elliptique, bornée, $\frac{1}{2} [\sigma \circ \exp]^2$ est mesurable bornée. On rappelle le résultat:

Lemme 21 [SV][KAR] *Soit une E.D.S. du type (5.4) avec $\bar{\sigma}$ mesurable, uniformément elliptique, bornée et $\bar{\mu}$ mesurable bornée. Alors il y a existence et unicité en loi.*

Si l'on note Q_x la loi de la solution issue de x à l'instant 0, Q_x est l'unique solution au problème martingale

$$\forall \varphi \in C_\infty^0(\mathbb{R}) \quad \varphi(X_t) - \int_0^t (L\varphi)(X_u) du$$

est une martingale, avec $L = \frac{1}{2} [\bar{\sigma}(x)]^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \bar{\mu}(x) \frac{\partial}{\partial x}$.

De plus

$$\forall f \in C_b$$

$$x \mapsto E_x[f(X_t)]$$

est mesurable.

Enfin X a la propriété de Markov forte par rapport à la filtration canonique sur $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

On en déduit par image par $x \mapsto \exp(x)$ que la loi de S est l'unique solution au problème de martingales sur R_+^* associé à l'opérateur $\frac{1}{2}\sigma(x)^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, et que S a la propriété de Markov forte par rapport à la filtration canonique sur $C(R_+, R_+^*)$. On note dorénavant P_x la loi de S issue de x à l'instant 0.

Il est évident que S est une martingale locale continue, et une vraie martingale à cause de la bornitude de σ . Elle admet un temps local, en particulier. On note L_a^t le temps local à l'instant t au niveau a .

D'autre part on a la représentation exponentielle

$$S_t = S_0 \exp \left(\int_0^t \sigma(S_s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(S_s) ds \right) \quad (5.5)$$

et donc

$$\forall (x, y) \in R_+^{*2}, 0 < t$$

$$C_Q(x, y; t) = \mathbf{E}_x \left[\left(x \exp \left(\int_0^t \sigma(S_s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(S_s) ds \right) - y \right)^+ \right]$$

On en déduit

Lemme 22 $\forall (x, y) \in R_+^{*2}, 0 < t$

$$BS_\alpha(x, y; t) \leq C_Q(x, y; t) \leq BS_\beta(x, y; t)$$

▷ On travaille dans la filtration F dans laquelle est définie la solution de l'e.d.s. Soit le temps d'arrêt T_t défini par $t = \int_0^{T_t} \sigma^2(S_s) ds$ et $\tau_t = T_t^{-1}$. On a $\alpha^2 T_t \leq t \leq \beta^2 T_t$, $\alpha^2 t \leq \tau_t \leq \beta^2 t$. On note $\tilde{F}_t = F_{T_t}$. Le processus

$$\tilde{B}. = \int_0^{T.} \sigma(S_s) dB_s$$

est un \tilde{F} -mouvement brownien et

$$\begin{aligned} C_Q(x, y; t) &= \mathbf{E}_x \left[\left(x \exp \left(\tilde{B}_{\tau_t} - \frac{1}{2} \tau_t \right) - y \right)^+ \right] \\ &= \mathbf{E}_x \left[\mathbf{E}_x \left[\left(x \exp \left(\tilde{B}_{\tau_t} - \frac{1}{2} \tau_t \right) - y \right)^+ \mid \tilde{F}_{\alpha^2 t} \right] \right] \end{aligned}$$

Mais à cause de (2.2) et de $\mathbf{E}_x \left[\exp \left(\tilde{B}_{\tau_t} - \frac{1}{2} \tau_t \right) \mid \tilde{F}_{\alpha^2 t} \right] = \exp \left(\tilde{B}_{\alpha^2 t} - \frac{1}{2} \alpha^2 t \right)$

$$\mathbf{E}_x \left[\left(x \exp \left(\tilde{B}_{\tau_t} - \frac{1}{2} \tau_t \right) - y \right)^+ \mid \tilde{F}_{\alpha^2 t} \right] \geq \left(x \exp \left(\tilde{B}_{\alpha^2 t} - \frac{1}{2} \alpha^2 t \right) - y \right)^+$$

$\tilde{B}_{\alpha^2 t} \stackrel{(d)}{=} \alpha \tilde{B}_t$ et

$$C_Q(x, y; t) \geq \mathbf{E}_x \left[\left(x \exp \left(\alpha \tilde{B}_t - \frac{1}{2} \alpha^2 t \right) - y \right)^+ \right] = BS_\alpha(x, y; t)$$

De même

$$\begin{aligned} BS_\beta(x, y; t) &= \mathbf{E}_x \left[\mathbf{E}_x \left[\left(x \exp \left(\tilde{B}_{\beta^2 t} - \frac{1}{2} \beta^2 t \right) - y \right)^+ \mid \tilde{F}_{\tau_t} \right] \right] \\ &\geq \mathbf{E}_x \left[\mathbf{E}_x \left[\left(x \exp \left(\tilde{B}_{\tau_t} - \frac{1}{2} \tau_t \right) - y \right)^+ \right] \right] \\ &= \mathbf{E}_x \left[\left(x \exp \left(\tilde{B}_{\tau_t} - \frac{1}{2} \tau_t \right) - y \right)^+ \right] \\ &= C_Q(x, y; t) \end{aligned}$$

◁

Le lemme 22 et la propriété de domination du chapitre précédent donnent (*Bords*) et (*Bords Dual*).

Lemme 23 Si T_y désigne le temps d'atteinte par S du niveau y on a

$$\forall (x, y) \in R_+^{*2}$$

$$\begin{aligned} P_x [T_y < \infty] &> 0 \\ \lim_{y \uparrow \infty} T_y &= \infty \text{ } P_x\text{-p.s.} \\ \lim_{y \downarrow 0} T_y &= \infty \text{ } P_x\text{-p.s.} \end{aligned}$$

▷ En effet pour $y > x$ et $t > 0$ $P_x [T_y < t] = 0 \Rightarrow C_Q(x, y; t) = 0 \Rightarrow BS_\alpha(x, y; t) = 0$

et pour $y \leq x$ $P_x [T_y < t] = 0 \Rightarrow P_Q(x, y; t) = 0 \Rightarrow BS_\alpha(y, x; t) = 0$.

Les 2 autres propriétés découlent directement de la continuité P_x -p.s des trajectoires et de la durée de vie infinie du processus. \triangleleft

On est exactement dans le cadre des processus de Markov linéaires continus "indécomposables" de ([RY] ch 7 §3), dont on garde les notations.

0 est point frontière naturelle. S étant une martingale sa fonction d'échelle s est l'identité. La caractérisation du générateur infinitésimal étendu ([RY] théorème 3.12) donne pour $f \in D_A$

$$f'(x_2) - f'(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} Af(y) m(dy)$$

où m est la mesure de vitesse de S . Mais à cause de la caractérisation martingale $A = \frac{1}{2}\sigma(x)^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ et par suite $m(dy) = \frac{2dy}{\sigma(y)^2 y^2}$.

On se convainc facilement que la transformation de Girsanov de l'exemple 20 ne donne rien, car on n'a plus l'indépendance des accroissements. On va voir qu'on a cependant encore $\hat{Q} = Q$. Ceci s'explique par la caractérisation infinitésimale de la dualité call-put:

$$Af(x) = \frac{1}{2}\sigma(x)^2 x^2 f''(x)$$

d'où

$$A^*g(x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma(x)^2 x^2 g(x))$$

et

$$\begin{aligned} A^*g''(x) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{2}\sigma(x)^2 x^2 g''(x) \right) \\ &= (Ag(x))'' \end{aligned}$$

Mais l'on doit avoir

$$A^*g''(x) = (\hat{A}g(x))''$$

et A est un bon candidat pour \hat{A} .

On va montrer $\widehat{Q} = Q$ en utilisant la symétrie du semi-groupe par rapport à sa mesure de vitesse, et le lien entre le générateur infinitésimal (lié à la mesure de vitesse par la formule de Feller) et le temps local de S . On verra ensuite une démonstration purement infinitésimale.

5.3.2 Symétrie du semi-groupe.

De la formule ([RY] corollaire 3.8), pour $x \in]a, b[$ et f borélienne positive:

$$\mathbf{E}_x \left[\int_0^{T_a \wedge T_b} f(S_t) dt \right] = \int_{]a, b[} G_{a,b}(x, y) f(y) m(dy)$$

où

$$\begin{aligned} G_{a,b}(x, y) &= \frac{(x-a)(b-y)}{(b-a)} \text{ pour } x \leq y \\ &= \frac{(y-a)(b-x)}{(b-a)} \text{ pour } x \geq y \end{aligned}$$

et de $\lim_{y \uparrow \infty} T_y = \lim_{y \downarrow 0} T_y = \infty$ P_x -p.s on tire l'expression du noyau potentiel de S

$$Uf(x) = \mathbf{E}_x \left[\int_0^\infty f(S_t) dt \right] = \int_{R_+^*} x \wedge y f(y) m(dy)$$

U est symétrique par rapport à m . On peut passer à la résolvante dès que le noyau potentiel est borné ([RY] exercice 4.17), ce qui n'est pas le cas ici, mais l'hypothèse de noyau potentiel propre suffit ([DM]), et U est clairement propre. On passe alors au semi-groupe par transformée de Laplace (inverse) dès que le processus est continu à droite ou à gauche, et ici S est continu.

Lemme 24 Q est symétrique par rapport à la mesure de vitesse $m(dy) = \frac{2dy}{\sigma(y)^2 y^2}$.

5.3.3 Egalité de Q et \widehat{Q}

Lemme 25 Les calls $C_Q(\cdot, y; t)$ sont continus.

▷ D'après la remarque 4 il suffit de montrer que les calls sont croissants et les puts décroissants.

Soit $0 < x < z$ et $y \in R_+^*$ fixés. On utilise une méthode de couplage: on travaille sur l'espace de probabilité produit de $(\Omega, F, (F_t), P_x)$ et $(\Omega, F, (F_t), P_z)$ où $\Omega = C(R_+, R_+^*)$ et (F_t) est la filtration canonique. On note: (ω_x, ω_z) un point de $\Omega \times \Omega$, $S_t^x(\omega_x) = \omega_x(t)$, $S_t^z = \omega_z(t)$, $T_g(\omega_x)$ (resp. $T_g(\omega_z)$) le temps d'atteinte de la courbe $t \mapsto g(t)$, où g est une fonction continue, par $S^x(\omega_x)$ (resp. $S^z(\omega_z)$), et $(F \otimes F)_t$ la filtration canonique de $\Omega \times \Omega$.

Soit $T^{x,z}(\omega_x, \omega_z) = \inf \{u \geq 0 / S_u^x(\omega_x) = S_u^z(\omega_z)\}$. Alors $T^{x,z}$ est un temps d'arrêt de la filtration $(F \otimes F)_t$ et $T^{x,z}(\omega_x, \omega_z) = T_{S^z(\omega_z)}(\omega_x) = T_{S^x(\omega_x)}(\omega_z)$ $P_x \otimes P_z$ p.s.

$$\begin{aligned} C_Q(x, y; t) &= E^{P_x} [(S_t - y)^+] \\ &= E^{P_x \otimes P_z} [(S_t^x - y)^+] \\ &= E^{P_x \otimes P_z} [E^{P_x \otimes P_z} [(S_t^x - y)^+ | (F \otimes F)_{T^{x,z}}] 1_{(T^{x,z} < t)} \\ &\quad + E^{P_x \otimes P_z} [(S_t^x - y)^+ 1_{(T^{x,z} \geq t)}] \end{aligned}$$

Les égalités suivantes ayant lieu $P_x \otimes P_z$ p.s., on a:

$$\begin{aligned} E^{P_x \otimes P_z} [(S_t^x - y)^+ | (F \otimes F)_{T^{x,z}}] 1_{(T^{x,z} < t)} &= E^{P_x} [(S_t - y)^+ | F_{T_{S^z(\omega_z)}(\omega_x)}] 1_{(T^{x,z} < t)} \\ &= C_Q(S_{T_{S^z(\omega_z)}(\omega_x)}^x, y; t - T_{S^z(\omega_z)}) 1_{(T^{x,z} < t)} \\ &= C_Q(S_{T^{x,z}}^x, y; t - T^{x,z}) 1_{(T^{x,z} < t)} \\ &= C_Q(S_{T^{x,z}}^z, y; t - T^{x,z}) 1_{(T^{x,z} < t)} \\ &= E^{P_x \otimes P_z} [(S_t^z - y)^+ | (F \otimes F)_{T^{x,z}}] 1_{(T^{x,z} < t)} \end{aligned}$$

où l'on a utilisé $S_{T^{x,z}}^x = S_{T^{x,z}}^z$ pour $T^{x,z} < \infty$.

D'où

$$\begin{aligned}
& C_Q(x, y; t) - C_Q(z, y; t) \\
&= E^{P_x} [(S_t - y)^+] - E^{P_z} [(S_t - y)^+] \\
&= E^{P_x} \otimes P_z \left[E^{P_x} \otimes P_z \left[(S_t^x - y)^+ \mid (F \otimes F)_{T^{x,z}} \right] 1_{(T^{x,z} < t)} \right] \\
&\quad + E^{P_x} \otimes P_z \left[(S_t^x - y)^+ 1_{(T^{x,z} \geq t)} \right] \\
&\quad - E^{P_x} \otimes P_z \left[E^{P_x} \otimes P_z \left[(S_t^z - y)^+ \mid (F \otimes F)_{T^{x,z}} \right] 1_{(T^{x,z} < t)} \right] \\
&\quad - E^{P_x} \otimes P_z \left[(S_t^z - y)^+ 1_{(T^{x,z} \geq t)} \right] \\
&= E^{P_x} \otimes P_z \left[\left((S_t^x - y)^+ - (S_t^z - y)^+ \right) 1_{(T^{x,z} \geq t)} \right]
\end{aligned}$$

A cause de la continuité des trajectoires, de la croissance de $(\cdot - y)^+$ et de $x < z$, $(S_t^x - y)^+ \leq (S_t^z - y)^+$ sur $(T^{x,z} \geq t)$, d'où $C_Q(x, y; t) \leq C_Q(z, y; t)$. Le même raisonnement donne la décroissance des puts. \triangleleft

On déduit alors de la symétrie de Q

Lemme 26 $\forall (x, y) \in R_+^{*2}, 0 < t$

$$E_x [L_y^t] = E_y [L_x^t]$$

\triangleright Soit φ et ψ 2 fonctions continues à support compact de R_+^* et $t > 0$ fixé.

$$\begin{aligned}
& \int \int \varphi(x) \psi(y) E_x [L_y^t] dx dy \\
&= \int \varphi(x) E_x \left[\int \psi(y) L_y^t dy \right] dx \\
&= \int \varphi(x) E_x \left[\int_0^t \psi(S_s) d\langle S \rangle_s \right] dx \\
&= \int \varphi(x) E_x \left[\int_0^t \psi(S_s) \sigma(S_s)^2 S_s^2 ds \right] dx \\
&= \int \varphi(x) dx \int_0^t E_x \left[\psi(S_s) \sigma(S_s)^2 S_s^2 \right] ds \\
&= \int_0^t \int \varphi(x) E_x \left[\psi(S_s) \sigma(S_s)^2 S_s^2 \right] dx ds \\
&= \int_0^t \int \sigma(x)^2 x^2 \varphi(x) E_x \left[\psi(S_s) \sigma(S_s)^2 S_s^2 \right] \frac{dx}{\sigma(x)^2 x^2} ds \\
&= \int_0^t \int \sigma(x)^2 x^2 \varphi(x) Q_s \left[\psi(\cdot) \sigma(\cdot)^2 \cdot^2 \right] (x) \frac{dx}{\sigma(x)^2 x^2} ds \\
&= \int_0^t \int Q_s \left[\varphi(\cdot) \sigma(\cdot)^2 \cdot^2 \right] (x) \sigma(x)^2 x^2 \psi(x) \frac{dx}{\sigma(x)^2 x^2} ds
\end{aligned}$$

et par le cheminement inverse

$$\int \int \psi(x) \varphi(y) E_x [L_y^t] dx dy = \int_0^t \int Q_s [\varphi(\cdot) \sigma(\cdot)^2 \cdot^2] (x) \sigma(x)^2 x^2 \psi(x) \frac{dx}{\sigma(x)^2 x^2} ds$$

On en tire l'égalité de $E_x [L_y^t]$ et $E_y [L_x^t]$ presque sûrement par rapport à la mesure de Lebesgue sur R_+^{*2} . Mais à cause de la formule de Tanaka

$$\frac{1}{2} E_x [L_y^t] = C_Q(x, y; t) - (x - y)^+$$

, de la continuité des calls en y et du lemme précédent, $(x, y) \mapsto E_x [L_y^t]$ est continue et l'égalité a lieu partout. \triangleleft

Theoreme 27 $\exists \hat{Q}$ et $\hat{Q} = Q$.

\triangleright Par la formule de Tanaka

$$\forall (x, y) \in R_+^{*2}, t > 0$$

$$\begin{aligned} E_x [L_y^t] &= E_y [L_x^t] \\ \Leftrightarrow C_Q(x, y; t) - (x - y)^+ &= C_Q(y, x; t) - (y - x)^+ \\ \Leftrightarrow C_Q(x, y; t) - (x - y)^+ &= P_Q(y, x; t) + y - x - (y - x)^+ \\ \Leftrightarrow C_Q(x, y; t) &= P_Q(y, x; t) + y - x - (y - x)^+ + (x - y)^+ \\ \Leftrightarrow C_Q(x, y; t) &= P_Q(y, x; t) \end{aligned}$$

\triangleleft

Corollaire 28 Si σ est continue les calls $C_Q(\cdot, y; t)$ sont C^1 .

\triangleright On sait d'après [SV] que sous l'hypothèse σ continue vérifiant (I0) Q admet une densité q par rapport à la mesure de Lebesgue sur R_+^* . A cause de $C_Q(x, y; t) = \int q(x, z; t) (z - y)^+ dz$ ceci entraîne que les calls sont C^1 en y , donc en x à cause de $Q = \hat{Q}$. \triangleleft

5.3.4 Approche infinitésimale.

On va donner une démonstration purement analytique de $\widehat{A} = A$.

Soit A l'opérateur défini par

$$D(A) = \left\{ g \in G / \frac{1}{2} \sigma^2(x) x^2 g'' \in C_K(R_+^*) \right\}$$

et $Ag(x) = \frac{1}{2} \sigma^2(x) x^2 g''(x)$, où g'' désigne la dérivée seconde distribution.

Lemme 29 $D(A)$ est dense dans G .

▷ Soit $b \in G'$ tel que

$$\forall g \in D(A)$$

$$\langle\langle b, g \rangle\rangle = \int b_m(dx) g(x) + b_0 g_0 + b_\infty g_\infty = 0 \quad (5.6)$$

Pour $g = g_0 + g_\infty Id$, qui est dans $D(A)$, (5.6) donne

$$\begin{aligned} b_0 &= - \int b_m(dx) \\ b_\infty &= - \int x b_m(dx) \end{aligned}$$

et (5.6) se réécrit

$$\forall g \in D(A)$$

$$\int b_m(dx) [g(x) - g_0 - g_\infty x] = 0$$

Pour $g \in D(A)$ la fonction $x \mapsto \int (x-y)^+ g''(y) dy$ est bien définie, a même dérivée seconde distribution que $g - g_0 - g_\infty Id$. D'où $g(x) - g_0 - g_\infty x = \int (x-y)^+ g''(y) dy + \epsilon x + f$. Mais $g(x) - g_0 - g_\infty x$ est nulle en 0 et constante à droite du support de g'' , g étant affine en dehors du support de g'' . Par suite $f = 0$, $\epsilon = - \int g''(y) dy$ et

$$g(x) - g_0 - g_\infty x = \int (x-y)^+ g''(y) dy - x \int g''(y) dy$$

Par Fubini b_m vérifie

$$\forall g \in D(A)$$

$$\int g''(y) dy \left[\int b_m(dx) (x-y)^+ - \int x b_m(dx) \right] = 0$$

Soit

$$\forall f \in C_K(R_+^*)$$

$$\int f(y) dy \frac{\left[\int b_m(dx) (x-y)^+ - \int x b_m(dx) \right]}{\frac{1}{2} \sigma^2(y) y^2} = 0$$

D'où

$$\forall y \in R_+^*$$

$$\int b_m(dx) (x-y)^+ = \int x b_m(dx)$$

qui entraîne $b_m = 0$ en dérivant 2 fois, d'où $b_0 = b_\infty = 0$ et le résultat par le théorème de Hahn-Banach. \triangleleft

Lemme 30 Soit $\lambda > 0$. $(A - \lambda Id) D(A)$ est dense dans G .

\triangleright En raisonnant comme ci-dessus on est amené à montrer, pour $b_m \in E$, que

$$\forall g \in D(A)$$

$$\int b_m(dx) \left[\frac{1}{2} \sigma^2(x) x^2 g''(x) - \lambda (g(x) - g_0 - g_\infty x) \right] = 0 \quad (5.7)$$

entraîne $b_m = 0$.

Mais $g(x) - g_0 - g_\infty x = \int (x - y)^+ g''(y) dy - x \int g''(y) dy$ et

$$\begin{aligned}
& \int b_m(dx) \left[\frac{1}{2} \sigma^2(x) x^2 g''(x) - \lambda (g(x) - g_0 - g_\infty x) \right] \\
= & \int b_m(dx) \left[\frac{1}{2} \sigma^2(x) x^2 g''(x) - \lambda \left(\int (x - y)^+ g''(y) dy - x \int g''(y) dy \right) \right] \\
= & \int b_m(dx) \frac{1}{2} \sigma^2(x) x^2 g''(x) - \lambda \int \int b_m(dx) (x - y)^+ g''(y) dy + \lambda \int x b_m(dx) \int g''(y) dy \\
= & \int \frac{1}{2} \sigma^2(x) x^2 g''(x) \left[b_m(dx) - \frac{2\lambda}{\sigma^2(x) x^2} dx \int b_m(dz) (z - x)^+ + \frac{2\lambda}{\sigma^2(x) x^2} dx \int z b_m(dz) \right]
\end{aligned}$$

D'où comme ci-dessus

$$b_m(dx) - \frac{2\lambda}{\sigma^2(x) x^2} dx \int b_m(dz) (z - x)^+ + \frac{2\lambda}{\sigma^2(x) x^2} dx \int z b_m(dz) = 0$$

soit

$$b_m(dx) = \frac{2\lambda}{\sigma^2(x) x^2} dx \left[\int b_m(dz) (z - x)^+ - \int z b_m(dz) \right]$$

Notons $M(x) = \frac{2\lambda}{\sigma^2(x) x^2} \left[\int b_m(dz) (z - x)^+ - \int z b_m(dz) \right]$ et $N(x) = \frac{\sigma^2(x) x^2}{2\lambda} M(x)$.

Alors $b_m(dx) = M(x) dx$ et par suite $\int |M(x)| dx < \infty$ et $\int x |M(x)| dx < \infty$. De plus

$$N(x) = \int M(z) (z - x)^+ dz - \int z M(z) dz$$

et N est absolument continue avec $N'(x) = -\int_{z \geq x} M(z) dz$. D'où $\lim_{x \rightarrow \infty} N'(x) = 0$ et $\lim_{x \downarrow 0^+} N'(x) = -\int M(z) dz$. Mais $\frac{N(x)}{x^2} = \frac{\sigma^2(x) M(x)}{2\lambda}$ est intégrable, et ceci entraîne $\lim_{x \downarrow 0^+} N'(x) = 0$.

La fonction N vérifie

$$N'' = \frac{2\lambda}{\sigma^2(x) x^2} N$$

au sens des distributions.

Supposons qu'il existe x_0 tel que $N(x_0) > 0$. Soit $a = \sup \{x < x_0 / N(x) = 0\}$ et $b = \inf \{x > x_0 / N(x) = 0\}$, $a = -\infty$ et $b = \infty$ si les ensembles correspondants sont vides. Si a et b sont finis, N est convexe sur $[a, b]$ avec $N(x_0) > 0$, $N(a) = N(b) = 0$ et c'est impossible. Si a est fini et b infini, N est convexe sur $[a, \infty[$ avec $N'(a) \geq 0$,

d'où $\lim_{x \rightarrow \infty} N'(x) > 0$ et c'est impossible. Si $N(x) > 0$ pour $x < x_0$ et si b fini, N est convexe sur $]0, b]$ avec $N'(b) \leq 0$ d'où $\lim_{x \downarrow 0^+} N'(x) < 0$ et c'est aussi impossible.

N est nécessairement strictement positive et donc strictement convexe sur R_+^* , mais ceci contredit $\lim_{x \rightarrow \infty} N'(x) = \lim_{x \downarrow 0^+} N'(x) = 0$.

Finalement $N \leq 0$, de même $N \geq 0$ et N, M et b_m sont nuls. \triangleleft

$\frac{1}{2}\sigma^2(y)y^2g''(y)$ étant continue on montre facilement que pour $g \in D(A)$ et $x \in R_+^*$ tel que localement $\frac{g(z)}{1+z} \leq \frac{g(x)}{1+x}$ on a $g''(x) \leq 0$, d'où $(Ag)(x) = \frac{1}{2}\sigma^2(x)x^2g''(x) \leq 0$. A cause de $(Ag)_0 = (Ag)_\infty = 0$ et du principe du maximum (4.2) ceci entraîne que A est un pré-générateur.

Soit C l'opérateur de la partie générateur infinitésimal, $\mu \in D(A^\odot)$ et $F = \tilde{T}\mu + a + bId$. Alors

$$C(\tilde{T}\mu + a + bId)(x) = \langle \langle A^*\mu, (x - \cdot)^+ \rangle \rangle = \int (A^*\mu)_m(dy)(x - y)^+ + (A^*\mu)_0 x$$

et pour f mesurable bornée à support compact

$$\begin{aligned} & \int f(x) C F(x) dx \\ &= \int f(x) C(\tilde{T}\mu + a + bId)(x) dx \\ &= \int f(x) \left[\int (A^*\mu)_m(dy)(x - y)^+ dx + (A^*\mu)_0 x \right] \\ &= \int (A^*\mu)_m(dy) \int f(x)(x - y)^+ dx + (A^*\mu)_0 \int f(x) x dx \\ &= \langle \langle A^*\mu, \int f(x)(x - \cdot)^+ dx \rangle \rangle \end{aligned}$$

Pour $f = g''$ où $g \in D(A)$ on a vu

$$g(x) - g_0 - g_\infty x = \int (x - y)^+ g''(y) dy - x \int g''(y) dy$$

Par suite $g(y) = \int g''(x)(x-y)^+ dx + \alpha y + \beta$ et A s'annulant sur les fonctions affines

$$\begin{aligned} & \int g''(x)CF(x)dx \\ &= \langle \langle A^* \mu, \int g''(x)(x-\cdot)^+ dx \rangle \rangle \\ &= \langle \langle \mu, A \int g''(x)(x-\cdot)^+ dx \rangle \rangle \\ &= \int \mu_m(dy) \frac{1}{2} \sigma^2(y) y^2 g''(y) \end{aligned}$$

D'où $\int \frac{1}{2} \sigma^2(x) x^2 g''(x) \frac{CF(x)}{\frac{1}{2} \sigma^2(x) x^2} dx = \int \mu_m(dy) \frac{1}{2} \sigma^2(y) y^2 g''(y)$ et $\frac{1}{2} \sigma^2(x) x^2 g''(x)$ décrivant

$C_K(R_+^*)$ quand g décrit $D(A)$ ceci entraîne $\frac{CF(x)}{\frac{1}{2} \sigma^2(x) x^2} dx = \mu_m(dx) = F''(dx)$ puis

$$CF(x) = \frac{1}{2} \sigma^2(x) x^2 F''(x)$$

Montrons maintenant $C \subset A$ (A désigne ici le pré-générateur et non sa fermeture).

Soit $F \in D(C)$. A cause de $F''(dx) = F''(x) dx \in E$ et de (I0) on a $\int \left| \frac{CF(x)}{x} \right| dx < \infty$.

Soit une suite f_n de fonctions de $C_K(R_+^*)$ telle que $f_n \rightarrow CF$ uniformément sur les compacts de R_+^* et $0 \leq |f_n| \leq |CF|$. On a $(CF)_0 = (CF)_\infty = 0$ et $f_n \rightarrow CF$ dans G . De plus

$$\int \left| \frac{CF(x) - f_n(x)}{x} \right| dx \rightarrow 0$$

Il suffit de montrer que (F, CF) est dans le graphe de A pour F du type particulier $F(x) = \int F''(y)(y-x)^+ dy$, les fonctions affines étant dans les noyaux de A et de C .

Soit $F_n(x) = \int \frac{2f_n(y)}{\sigma^2(y)y^2} (y-x)^+ dy$. Alors

$$AF_n = f_n \rightarrow CF \text{ dans } G$$

et

$$\begin{aligned} & \frac{F(x) - F_n(x)}{1+x} \\ &= \int \frac{2(CF(y) - f_n(y))(y-x)^+}{\sigma^2(y)y^2} \frac{1}{1+x} dy \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \left| \int \frac{2(CF(y) - f_n(y))(y-x)^+}{\sigma^2(y)y^2} \frac{1}{1+x} dy \right| \\ & \leq \frac{1}{\alpha^2} \int \frac{2|CF(y) - f_n(y)|}{y^2} \frac{y}{(1+x)} dy \\ & \leq \frac{1}{\alpha^2} \int \frac{2|CF(y) - f_n(y)|}{y} dy \end{aligned}$$

d'où $F_n \rightarrow F$ dans G .

Ceci prouve $C \subset A$. D'où $\overline{C} \subset \overline{A}$, et en revenant aux notations canoniques $\hat{A} = A$.

5.4 Un exemple à générateur borné.

On reprend le second exemple, mais en temps continu.

Soient 2 fonctions α_+ , α_- continues qui vérifient (5.1) et soit $g \in G$. Alors la fonction Ag définie par $Ag(x) = g(\alpha_+(x)) + g(\alpha_-(x)) - 2g(x)$ est continue, $\alpha_+(x)$ et $\alpha_-(x)$ tendent vers 0 en 0^+ et $Ag(x) \rightarrow 2g_0 - 2g_0 = 0$ en 0^+ . En ∞ $\frac{Ag(x)}{x} = \frac{g(\alpha_+(x))\alpha_+(x)}{\alpha_+(x)x} + \frac{g(\alpha_-(x))\alpha_-(x)}{\alpha_-(x)x} - 2\frac{g(x)}{x} \rightarrow 0$ à cause de $\frac{g(\alpha_+(x))}{\alpha_+(x)} \rightarrow g_\infty$, $\frac{g(\alpha_-(x))}{\alpha_-(x)} \rightarrow g_\infty$, $\frac{g(x)}{x} \rightarrow g_\infty$ et $\alpha_+(x) + \alpha_-(x) = 2x$.

A définit un opérateur de G tout entier dans G , borné à cause de K_+ et K_- et qui s'annule sur les fonctions affines. A est donc le générateur infinitésimal du semi-groupe $Q_t = e^{tA}$ qui est markovien et martingalien. De plus, il est évident que A vérifie le principe du maximum (4.2) et Q est donc positif.

D'après la proposition 23 Q propage la convexité si et seulement si les fonctions

$$\begin{aligned} a(y, x) &= A(\cdot - y)^+[x] \\ &= (\alpha_+(x) - y)^+ + (\alpha_-(x) - y)^+ - 2(x - y)^+ \end{aligned}$$

vérifient les propriétés (i) (ii) et (iii) du paragraphe "générateurs bornés".

Commençons par regarder la fonction $y \mapsto a(y, x)$. On a

$$\begin{aligned}
a(y, x) &= 0 \text{ pour } y \geq \alpha_+(x) \\
&= (\alpha_+(x) - y) \text{ pour } \alpha_+(x) \geq y \geq x \\
&= (\alpha_+(x) - y) - 2(x - y) \text{ pour } x \geq y \geq \alpha_-(x) \\
&= 0 \text{ pour } \alpha_-(x) \geq y
\end{aligned}$$

Elle satisfait donc les propriétés (i) et (iii), et aussi la propriété (ii) avec

$$a'(x^-, x) = -a'(x^+, x) = 1.$$

Reste à regarder la fonction $x \mapsto a(y, x)$. Elle doit être positive, convexe croissante sur $[0, y]$ et convexe décroissante sur $[y, \infty[$.

Mais $A(\cdot - y)^+(x) = (\alpha_+(x) - y)^+ + (\alpha_-(x) - y)^+ - 2(x - y)^+$ et $A(\cdot - y)^+(x) = 0$ pour $\alpha_-(x) \geq y$ ou $\alpha_+(x) \leq y$.

$$A(\cdot - y)^+(y) = \alpha_+(y) - y \geq 0 \text{ et } A(\cdot - y)^+(x) = (\alpha_+(x) - y)^+ \text{ sur }]0, y].$$

On retrouve la première condition nécessaire du cas discret: pour tout $y > 0$ $x \mapsto \alpha_+(x)$ doit être convexe sur $\{x / \alpha_+(x) > y \text{ et } x < y\}$. A cause de (5.1) α_+ est alors nécessairement convexe comprise entre Id et $2Id$.

Inversement, si α_+ est convexe, par (5.1) $-\alpha_-$ est convexe et α_+ et α_- sont strictement croissantes. A cause de l'expression ci-dessus et de $(\alpha_+(x) - y) - 2(x - y) = y - \alpha_-(x)$, $a(y, \cdot)$ est convexe croissante sur $[0, y]$ et convexe décroissante sur $[y, \infty[$.

Par suite la condition nécessaire et suffisante est la même en temps discret et en temps continu.

On aurait pu affirmer d'emblée que la condition α_+ convexe était suffisante à partir du cas discret par un argument d'approximation: les opérateurs T_h vérifient clairement

$$(i) \left\| T_h^k \right\| \leq M e^{\omega k} \text{ pour } M \geq 1 \text{ et } \omega \geq 0 \text{ uniformément en } h \text{ assez petit.}$$

(ii) $\frac{T_h - Id}{h}g \rightarrow Ag$ dans G quand $h \downarrow 0$ (ici $\frac{T_h - Id}{h}g = Ag$ en fait)

On a facilement sous ces hypothèses (cf [PA]) $T_{\frac{t}{n}}^n g \rightarrow Q_t g$ dans G , en particulier ponctuellement, et $Q_t g$ est convexe dès que les $T_{\frac{t}{n}}^n g$ sont convexes.

On aurait pu imaginer, parcontre, qu'un défaut de propagation de la convexité par $T_{\frac{t}{n}}$ disparaisse à l'infini, et que $Q_t g = \lim_{n \uparrow \infty} T_{\frac{t}{n}}^n g$ soit tout de même convexe; ce phénomène n'a pas lieu.

Remarquons enfin que pour $\alpha_-(x) \geq y$ on a $A(\cdot - y)^+(x) = 0$ et pour $z \geq \frac{y}{K_-}$ $a'_z(y, z) = 0$. On a aussi $a'_z(y, y^-) = \alpha'_+(y^-) \leq 2$, $-a'_z(y, y^+) = \alpha'_-(y^-) = 2 - \alpha'_+(y^-) \leq 2$ et par suite \hat{A} est borné. Explicitons \hat{A} . On utilise $\hat{A}(\cdot - x)^+[y] = A(\cdot - y)^+[x]$ pour obtenir

$$\hat{A}g(y) = -2g(y) + \alpha'_+(\alpha_+^{-1}(y))g(\alpha_+^{-1}(y)) + \alpha'_-(\alpha_-^{-1}(y))g(\alpha_-^{-1}(y)) + \int_{\alpha_+^{-1}(y)^+}^{\alpha_-^{-1}(y)^+} \alpha_+''(dx)g(x)$$

Remarque 31 *Le processus associé à Q est un processus de Poisson généralisé avec comme mesure de saut $\frac{1}{2} [\delta_{\alpha_+(x)-x}(dy) + \delta_{\alpha_-(x)-x}(dy)]$. L'expression de \hat{A} suggère que l'interprétation probabiliste du semi-groupe call-put dual n'est pas évidente.*

Bibliography

- [DM] *"Probabilités et potentiel"*, ch. XII à XVI, C.Dellacherie P.A.Meyer, Hermann 1987
- [EKJP] *"Robustness of the Black-Scholes formula"*, N.El Karoui M.Jeanblanc-Piqué, preprint Université d'Evry 1994
- [KAR] *"Brownian motion and stochastic calculus"*, I.Karatzas S.E.Shreve, Springer 1988
- [NR] *"One-parameter semi-groups of positive operators"*, D.Nagel E.Rainer, LNM, Springer-Verlag 1986
- [PA] *"Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations"*, A.Pazy, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag 1983
- [RY] *"Continuous martingales and brownian motion"*, D.Revuz M.Yor, Springer-Verlag 1991
- [SV] *"Multidimensional diffusion processes"*, D.W.Stroock S.R.S.Varhadan, Springer 1979
- [VN] *"The adjoint of a semigroup of linear operators"*, J.Van Neerven, LNM, Springer-Verlag 1992