Polynômes harmoniques et inégalités de Nelson

par

Denis Feyel

Introduction. C.Martini a récemment montré [1] que les polynômes harmoniques sont denses dans l'espace $L^2(E,\mu)$ où (E,μ) est un espace gaussien de dimension infinie. Nous nous proposons ici d'en donner une démonstration à l'aide des fonctions de Bessel, ce qui nous permettra d'énoncer des résultats dans $L^p(\mu)$ et dans $W^\infty(\mu)$. Il se trouve que cela nous a conduit à une démonstration très simple et probablement inédite des inégalités de Nelson, que nous exposons ici, bien qu'elle ne doive finalement plus rien aux polynômes harmoniques.

Nous ne nous occuperons en fait que de l'espace $\mathbb{R}^\infty$ muni de sa mesure gaussienne canonique μ ou de l'espace $\mathbb{R}^{1+\infty} = \mathbb{R}\times\mathbb{R}^\infty$ muni de sa gaussienne canonique μ'. Il va de soi que tous les résultats obtenus se transportent immédiatement par isomorphisme (ou pseudo-isomorphisme) à tout autre espace localement convexe lusinien gaussien (E,μ), et même non lusinien (théorème de Tsirelson) si μ est de Radon.

Fonctions harmoniques

Si n est un entier, on note $\mathbb{R}^n$ le sous-espace évident de $\mathbb{R}^\infty$, x^n la projection de $x\in\mathbb{R}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$, et μ^n celle de μ.

Pour $\alpha>0$, soit σ_α^n la mesure uniforme de masse 1 sur la sphère de $\mathbb{R}^n$ de rayon α. On étend à $\mathbb{R}^\infty$ sa transformée de Fourier

$$\varphi_\alpha^n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle u,x^n\rangle}\,\sigma_\alpha^n(du) = F_n(\alpha|x^n|)$$

où $F_n(t) = c_n\int_0^\pi \cos(t\cos\theta)\sin^{n-2}\theta d\theta$ peut s'exprimer à l'aide de la fonction de Bessel $J_{(n-2)/2}$, et où $1/c_n$ est une intégrale de Wallis.

1 Lemme : *quand $n\to\infty$, φ_α^n converge presque partout et dans $L^p(\mathbb{R}^\infty,\mu)$ vers la constante $\mathrm{e}^{-\alpha^2/2}$.*

Démonstration : on a d'abord $|F_n'(t)| \le 2c_n/(n-1) \le 1/\sqrt{n}$ pour n assez grand. D'autre part $g_n(x) = |x^n|/\sqrt{n}$ tend vers 1 presque partout (loi des grands nombres). Par suite

$$|F_n(\alpha|x^n|) - F_n(\alpha\sqrt{n})| \le \alpha|g_n(x)-1|$$

tend vers 0 presque partout. On en déduit que la suite numérique $F_n(\alpha\sqrt{n})$ tend vers $\int F_n(\alpha|x^n|)d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\widehat{\mu}(u)\sigma_\alpha^n(du) = \mathrm{e}^{-\alpha^2/2}$, et le résultat s'ensuit (convergence dominée). $\square$

On notera $\mathcal{H}_n^p$ le sous-espace de $L^p(\mathbb{R}^\infty,\mu)$ constitué des fonctions ne dépendant que des n premières variables et qui sont Δ-harmoniques. On a donc

2 Théorème : *$\bigcup_n \mathcal{H}_n^p$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^\infty,\mu)$.*
Démonstration : on va en fait le montrer pour $L^p(\mathbb{R}^{1+\infty},\mu')$, en notant t la première variable. Considérons la suite de fonctions

$$H_\alpha^n(t,x) = \mathrm{e}^{\alpha t}\,\varphi_\alpha^n(x)$$

On voit que la suite H_α^n converge presque partout et dans $L^p(\mu')$ vers la fonction $k_\alpha(t) = \mathrm{e}^{\alpha t-\alpha^2/2}$ (indépendante de x). Par ailleurs il est facile de voir que H_α^n est harmonique, de sorte que k_α est limite de fonctions harmoniques. Soit maintenant u un vecteur de Cameron-Martin de norme $|u| = \alpha$, il existe une "pseudo-isométrie" de $(\mathbb{R}^{1+\infty},\mu')$ sur lui-même qui amène la fonction k_α sur la fonction $k_u(x) = \exp(\langle u,x\rangle - |u|^2/2)$. Par suite l'adhérence des fonctions harmoniques contient un ensemble total dans L^p, et est donc tout l'espace. $\square$

Polynômes harmoniques

Toute fonction harmonique entière f sur $\mathbb{R}^n$ possède une série de Taylor

$$f(\lambda x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k f_k(x)$$

absolument convergente pour $|\lambda| < 1$ et $x \in \mathbb{R}^n$. Si $f \in \mathcal{H}_n^2$, cette série coïncide avec la série d'Hermite

$$P_t f(x) = \int f\big(x\,\mathrm{e}^{-t} + y\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}\big)\,d\mu(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-kt} f_k(x)$$

pour $\lambda = \mathrm{e}^{-t}$, de sorte que f_k est un polynôme harmonique homogène de degré k.

3 Théorème : *les polynômes harmoniques homogènes de degré k sont denses dans le $k^{\text{ème}}$ chaos de Wiener $\mathcal{C}_k(\mathbb{R}^\infty,\mu)$.*
Démonstration : soit $g \in \mathcal{C}_k$ orthogonale aux polynômes harmoniques homogènes de degré k, et soit $f = \Sigma_i f_i \in \mathcal{H}_n^2$. Les produits scalaires $\langle g, f_i\rangle$ sont nuls pour $i \neq k$ car les chaos sont orthogonaux, et pour $i = k$ par l'hypothèse, de sorte que g est orthogonale à $\mathcal{H}_n^2$. Mais comme $\bigcup_n \mathcal{H}_n^2$ est dense dans $L^2(\mu)$, g est nulle. $\square$

4 Corollaire : *les polynômes harmoniques sont denses dans l'espace $W^\infty(\mathbb{R}^\infty,\mu) = \bigcap_{r,p} W^{r,p}(\mathbb{R}^\infty,\mu)$ (et donc aussi dans chaque $W^{r,p}$).*
Démonstration : en effet $\bigcup_k \mathcal{C}_k$ est dense dans W^∞.

5 Remarque : on montre facilement grâce à l'hypercontractivité que la fonction H_α^n appartient à $W^\infty(\mathbb{R}^{1+\infty},\mu')$ et y converge vers k_α.

Inégalités de Nelson

6 Théorème : *si f appartient à $\mathcal{C}_k(\mathbb{R}^\infty, \mu)$, on a pour $p \geq 2$*

$$N_p(f) \leq \sqrt{(p-1)/k}\, N_p(\nabla f)$$

avec l'égalité pour $p = 2$.

Démonstration : si f est un polynôme appartenant à $\mathcal{C}_k$, et si L désigne l'opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck on a

$$L(|f|^p) = p|f|^{p-1}\mathrm{sgn}(f)Lf + p(p-1)|f|^{p-2}|\nabla f|^2$$

pour $p \geq 2$. Mais on a $Lf = -kf$, de sorte que l'intégration en μ, puis l'inégalité de Hölder fournissent

$$k\int |f|^p d\mu = (p-1)\int |f|^{p-2}|\nabla f|^2 d\mu \leq (p-1)N_p(f)^{p-2}N_p(\nabla f)^2$$

ce qui est la relation cherchée pour $k \geq 1$. Comme N_p est une semi-norme s.c.i. sur $L^2(\mu)$, on voit d'ailleurs par récurrence que $\mathcal{C}_k \subset L^p$, que $\nabla f \in \mathcal{C}_{k-1}$ pour $f \in \mathcal{C}_k$, puis que $\bigcup_k \mathcal{C}_k \subset W^\infty(\mathbb{R}^\infty, \mu)$. $\square$

7 Corollaire : *pour $f \in \mathcal{C}_k(\mathbb{R}^\infty, \mu)$ et $p \geq 2$ on a*

$$N_p(f) \leq (p-1)^{k/2} N_2(f)$$

Démonstration : compte tenu de l'inégalité $N_p(\nabla f)^2 \leq \Sigma_i N_p(\nabla_i f)^2$ et de l'inégalité du théorème, la récurrence nous ramène au premier chaos de Wiener pour lequel le résultat est évident car $|\nabla f|$ est alors la constante $N_2(f)$. $\square$

8 Remarque : rappelons comment Nelson en déduit l'hypercontractivité du semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck (*cf.* [3]) : si $f = \Sigma_k f_k \in L^2(\mu)$, on a

$$N_p(P_t f) \leq \sum_k \mathrm{e}^{-kt}(p-1)^{k/2}N_2(f_k) \leq c^{-1/2}N_2(f)$$

où $c = 1 - \mathrm{e}^{-2t}(p-1)$ pour $\mathrm{e}^{2t} > p-1 \geq 1$. On applique cela aux $f \otimes \cdots \otimes f$:

$$N_p(P_t f) \leq \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} c^{-1/2n}N_2(f) = N_2(f)$$

et la même inégalité pour $\mathrm{e}^{2t} = p-1 \geq 1$ par continuité.

9 Remarque : soit $f \geq 0$ une fonction sous-harmonique homogène de degré k. Pour $\mathrm{e}^{2t} = p-1 \geq 1$ on écrit $\mathrm{e}^{-kt} f(x) = f(x\,\mathrm{e}^{-t}) \leq P_t f(x)$ donc aussi l'inégalité de Nelson $N_p(f) \leq (p-1)^{k/2}N_2(f)$. En particulier, si $q \geq 0$ est une fonction sous-linéaire, on trouve $N_p(q) \leq \sqrt{p-1}N_2(q)$ (même en dimension infinie), et cela entraîne facilement que la fonction $\exp(\alpha q^2)$ est intégrable pour $\alpha < (2\,\mathrm{e}\, N_2(q)^2)^{-1}$.

Noyaux reproduisants

On a pour $f \in \mathcal{H}_n^2$ et $u \in \mathbb{R}^n$ $f(u) = \int f(x+u)d\mu(x) = \int f k_u d\mu \leq N_2(f)\,\mathrm{e}^{|u|^2/2}$ de sorte que $\mathcal{H}_n^2$ admet un noyau reproduisant $h^n(u,v)$ vérifiant

$$f(u) = \int h^n(u,v)f(v)d\mu^n(v)$$

pour toute $f \in \mathcal{H}_n^2$ et $u, v \in \mathbb{R}^n$. Soit T_n le projecteur orthogonal de $L^2(\mathbb{R}^\infty, \mu)$ sur $\mathcal{H}_n^2$. On note que $T_n P_t = P_t T_n$ car $\mathcal{H}_n^2$ est invariant par P_t. On a bien sûr $h_u^n = h^n(u,\cdot) = T_n k_u$ et

$$T_n f(u) = \int h^n(u,v)f(v)d\mu^n(v)$$

pour $f \in L^2(\mathbb{R}^\infty, \mu)$ et $u \in \mathbb{R}^n$.

10 Proposition : $h_u^n \in W^\infty(\mathbb{R}^n, \mu^n)$.
Démonstration : on a $P_t h_u^n = T_n P_t k_u = T_n k_{u\,\mathrm{e}^{-t}} = h_{u\,\mathrm{e}^{-t}}$ donc $h_u^n \in \bigcap_p L^p(\mu^n)$ grâce à l'hypercontractivité des P_t. Ce raisonnement s'étend aux dérivées partielles $\partial_i h_u^n = T_n \partial_i k_u$, et le résultat s'ensuit.

11 Remarque : on a seulement pu déterminer le noyau reproduisant de $\mathcal{H}_2^2$, on a trouvé $h^2(u,v) = 2\exp(\frac{1}{2}\langle u,v\rangle)\cos(\frac{1}{2}\det(u,v))$.

Bruit blanc

Soit $\mathcal{S}' \subset \mathbb{R}^\infty$ l'espace des suite à croissance lente. Il est bien connu que $\mathcal{S}'$ porte μ, et que $(\mathcal{S}', \mu)$ est isomorphe à l'espace du bruit blanc. Si $f \in L^2(\mu)$, la suite $T_n f$ converge vers f. Sa restriction à l'espace de Cameron-Martin $H = l^2$ converge simplement vers la transformée de Gauss-Hermite $\widehat{f}$ dans l'espace $(\mathcal{H})$ introduit dans [2]. D'ailleurs la convergence a lieu aussi au sens de $(\mathcal{H})$ (et donc aussi quasi-partout sur $\mathcal{S}'$ au sens de la capacité associée à $(\mathcal{H})$).
Si de plus $f \in (\mathcal{S})$ l'espace des fonctions test d'Hida, et si une suite $h_n \in \mathcal{H}_n^2$ converge vers f dans $(\mathcal{S})$, alors elle converge aussi vers $\widehat{f}$ dans l'espace $(\mathcal{H}_\infty)$ de [2], mais comme $(\mathcal{S}) = (\mathcal{H}_\infty)$, on doit avoir $f = \widehat{f}$, de sorte que comme l'a montré Martini les polynômes harmoniques ne sont pas denses dans $(\mathcal{S})$. Il serait intéressant de savoir s'ils sont denses dans les fonctions égales à leur transformée d'Hermite. Par ailleurs la suite de sous-espaces $\mathbb{R}^n$ n'est pas adaptée à l'oscillateur harmonique. Il serait aussi intéressant de la remplacer par une autre suite de sous-espaces de l'espace de Cameron-Martin.

Bibliographie

[1] C.Martini *Polynômes harmoniques dans un espace gaussien*
à paraître

[2] D.Feyel-A.de La Pradelle *Harmonic Analysis in Infinite Dimension*
Potential Analysis 2, p.23-36, 1993

[3] B.Simon *The* $\mathrm{P}(\Phi)_2$*-Euclidean (quantum) field theory*
Princeton University Press, 1974