REGULARITE ET INTEGRABILITE DES FONCTIONNELLES DE WIENER

par
DENIS FEYEL

Abstract. We prove a kind of generalization of the classical Ascoli theorem to inifinite dimensional gaussian space.

Introduction. Le théorème classique d'Ascoli montre qu'une suite de fonctions dont les dérivées sont uniformément bornées sur $[0,1]$ est relativement compacte en norme uniforme dès qu'elle est bornée en un point. Il y a des extensions bien connues de cette propriété aux espaces de Sobolev classiques sur $\mathbb{R}^m$ $(m < \infty)$, que l'on peut trouver chez Schwartz [Sc, p.40].
On se propose ici d'étendre cela au cas des espaces de Sobolev gaussiens en dimension infinie. Dans le cas particulier des fonctions H-lipschitziennes, ces propriétés sont liées à l'intégrabilité exponentielle étudiée par Pisier [P], Kusuoka [K] et Ustünel [U1-U2].

Dans tout l'article, E est un espace localement convexe lusinien muni d'une mesure gaussienne centrée μ chargeant tous les ouverts. Si f est une fonction sur E, on pose $f_\theta(x,y) = f(x\cos\theta + y\sin\theta)$. L'espace de Sobolev gaussien $W^{1,p}(\mu)$ n'est autre que l'espace des f telles que $\theta \to f_\theta$ soit de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans $L^p(\mu\otimes\mu)$. C'est évidemment un sous-espace de $L^p(\mu)$, qui est un espace de Banach pour sa norme naturelle. De plus, la fonction $f' = [\dfrac{df_\theta}{d\theta}]_{\theta=0}$ est linéaire dans sa seconde variable (*cf.* [F2]).

Le carré du champ Γf est défini par $\Gamma f(x) = \int f'(x,y)^2\,d\mu(y)$, de sorte que l'on a

$$N_p(\sqrt{\Gamma f}) = a_p N_p(f')$$

où $a_p^p = \int |t|^p\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\,dt/\sqrt{2\pi}$.

1 Lemme : *soit une suite $f_n \in W^{1,p}(\mu)$ telle que la suite des $\sqrt{\Gamma f_n}$ soit bornée dans $L^p(\mu)$. Alors la suite des $f_n - \mu(f_n)$ est bornée dans $W^{1,p}(\mu)$.*

Cet article paraîtra aux proceedings du NATO Advanced Research Workshop on Classical and Modern Potential Theory (Bonas, France), editor K.Gowrisankaran

Démonstration : selon une idée de Pisier [P], on a pour presque tout $(x, y) \in E \times E$

$$f_n(y) - f_n(x) = \int_0^{\pi/2} f_n'(x\cos\theta + y\sin\theta, -x\sin\theta + y\cos\theta)d\theta$$

Pour $g \in L^q(\mu)$ avec $q = p/(p-1)$, on obtient en tenant compte de l'invariance de $\mu \otimes \mu$

$$\int [f_n(y) - \mu(f_n)]g(y)d\mu(y) \leq \int_0^{\pi/2} N_p(f_n')N_q(g)d\theta$$

et finalement $N_p(f_n - \mu(f_n)) \leq \frac{\pi}{2}N_p(f_n') = \frac{\pi}{2}a_p N_p(\sqrt{\Gamma f_n})$

Rappelons ([FLP1]) que la capacité $C_{1,p}$ est définie par

$$C_{1,p}(h) = \mathrm{Inf}\{\ \|f\|_{W^{1,p}(\mu)}\ \big|\ \exists\ g \text{ s.c.i.} \quad |h| \leq g \leq f\ \}$$

L'espace $\mathcal{L}^1(C_{1,p})$ est l'adhérence en (semi-)norme $C_{1,p}$ du sous-espace des fonctions continues bornées . On a une injection linéaire continue canonique de $W^{1,p}(\mu)$ dans $\mathcal{L}^1(C_{1,p})$. L'image $\widetilde{f} \in \mathcal{L}^1(C_{1,p})$ de $f \in W^{1,p}(\mu)$ est dite "modification quasi-continue canonique" de f. Les ensembles de $C_{1,p}$-capacité nulle sont dits "polaires" ou "$C_{1,p}$-polaires", et sont μ-négligeables. Une propriété vraie sauf sur un ensemble polaire est dite vraie "quasi-partout". Enfin le dual de $\mathcal{L}^1(C_{1,p})$ est un espace de mesures bornées négligeant les ensembles $C_{1,p}$-polaires.

2 Proposition : *soit $f_n \in W^{1,p}(\mu)$ telle que la suite $\sqrt{\Gamma f_n}$ soit bornée dans $L^p(\mu)$. On suppose que la fonction $\mathrm{Sup}_n |\widetilde{f}_n|$ est finie quasi-partout sur un ensemble A de capacité $C_{1,p}(A)$ non nulle. Alors la suite f_n est bornée dans $W^{1,p}(\mu)$.*

Démonstration : on prend une mesure $\nu \geq 0$ appartenant au dual de $\mathcal{L}^1(C_{1,p})$ portée par A et de masse $\nu(1) = 1$. On a

$$f_n = f_n - \mu(f_n) - \nu(\widetilde{f}_n - \mu(f_n)) + \nu(\widetilde{f}_n)$$

de sorte que f_n est la somme de trois termes tous bornés dans $W^{1,p}(\mu)$ (les deux derniers sont des suites de constantes).

3 Théorème : *soit f_n une suite croissante. On suppose la suite $\sqrt{\Gamma f_n}$ bornée dans $L^p(\mu)$. Si l'enveloppe supérieure $\mathrm{Sup}_n \widetilde{f}_n$ des modifications canoniques est finie sur un ensemble de capacité non nulle, alors la suite $\widetilde{f}_n$ converge fortement dans $\mathcal{L}^1(C_{1,p})$.*

Démonstration : la proposition 2 montre que la suite f_n converge faiblement dans $W^{1,p}(\mu)$ vers $f = \mathrm{Sup}_n f_n$. Alors la suite $\widetilde{f}_n$ converge faiblement vers $\widetilde{f}$ dans $\mathcal{L}^1(C_{1,p})$. La suite $\widetilde{f} - \widetilde{f}_n$ est décroissante de sorte que l'on peut appliquer le lemme de Dini à la boule unité positive du dual de $\mathcal{L}^1(C_{1,p})$ (*cf.* [F2]), et que $C_{1,p}(\widetilde{f} - \widetilde{f}_n)$ tend vers 0.

4 Théorème : *soit f_n une suite appartenant à $W^{1,p}(\mu)$. On note $\widetilde{h}$ et $\widetilde{g}$ les limites supérieures et inférieures de la suite des modifications canoniques $\widetilde{f}_n$. On suppose que la suite $\sqrt{\Gamma f_n}$ est* <u>*dominée*</u> *dans $L^p(\mu)$, et que la fonction $\mathrm{Sup}_n \widetilde{f}_n$ est finie presque partout sur un ensemble de $C_{1,p}$-capacité non nulle.*
Alors $\widetilde{h}$ et $\widetilde{g}$ appartiennent à $W^{1,p}(\mu) \cap \mathcal{L}^1(C_{1,p})$. De plus, si la suite $\widetilde{f}_n$ converge presque partout, elle converge quasi-partout et fortement dans $\mathcal{L}^1(C_{1,p})$.

Démonstration : on applique d'abord le théorème 3 à la suite $v_n = f_1 \vee f_2 \vee \ldots \vee f_n$, ce qui est loisible vu la relation $\Gamma v_n \leq \mathrm{Sup}_n \Gamma f_n$, et la propriété de domination dans $L^p(\mu)$. Donc $\widetilde{v} = \sup_n \widetilde{f}_n$ appartient à $\mathcal{L}^1(C_{1,p})$. Le même raisonnement s'applique bien sûr aux deux suites $h_n = f_n \wedge f_{n+1} \wedge \ldots$ et $g_n = f_n \vee f_{n+1} \vee \ldots$, de sorte que $\widetilde{h}$ appartient à $\mathcal{L}^1(C_{1,p})$, et que $\widetilde{h}_n$ converge fortement vers $\widetilde{h}$ dans $\mathcal{L}^1(C_{1,p})$. On a évidemment la propriété analogue pour $\widetilde{g}$. Ensuite, si l'on a $\widetilde{h} = \widetilde{g}$ presque partout, on a nécessairement $\widetilde{h} = \widetilde{g}$ quasi-partout, et la suite $C_{1,p}(\widetilde{h}_n - \widetilde{g}_n)$ tend vers 0 grâce au lemme de Dini comme au théorème 3. On a enfin $C_{1,p}(\widetilde{h} - \widetilde{f}_n) \leq C_{1,p}(\widetilde{h}_n - \widetilde{g}_n)$, ce qui termine la démonstration.

Exemples : i) soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ muni de sa gaussienne canonique μ. Si $f \in W^{1,p}(\mu)$, la suite des espérances conditionnelles f_n sur les sous-tribus canoniques $\mathfrak{F}_n$ vérifie les hypothèses du théorème 4, car la suite $\sqrt{\Gamma f_n}$ forme une sous-martingale bornée dans $L^p(\mu)$. Alors les $\widetilde{f}_n$ convergent quasi-partout et fortement dans $\mathcal{L}^1(C_{1,p})$.

ii) soit P_t le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck, et soit $f \in W^{1,p}(\mu)$. Il résulte du théorème de ergodique de Stein [St] que $P_t f$ converge presque partout vers f quand t tend vers 0, et que les fonctions $\sqrt{\Gamma P_t f_n} \leq \mathrm{e}^{-t} P_t \sqrt{\Gamma f_n}$ sont dominées dans $L^p(\mu)$ pour $t < 1$. Par ailleurs, $P_t f$ est quasi-continu pour $t > 0$, de sorte que $P_t f$ converge $C_{1,p}$-quasi-partout vers $\widetilde{f}$.

5 Remarque : pour $p = 2$ (espace de Dirichlet), des résultats de ce type ont été obtenus par Bouleau et Hirsch ([BH]). Signalons aussi les résultats de L.Denis ([D]).

6 Remarque : on peut étendre le théorème 4 à une suite de fonctions f_n à valeurs banachiques. Il suffit de remarquer que l'on a toujours $\Gamma \|f_n\| \leq \Gamma f_n$.

Indiquons enfin une conséquence immédiate du théorème 4 :

7 Proposition : *si une suite $f_n \in W^{1,p}(\mu)$ converge en mesure, et si la suite $\sqrt{\Gamma f_n}$ est dominée dans $L^p(\mu)$, alors la suite $\widetilde{f}_n$ converge dans $\mathcal{L}^1(C_{1,p})$.*

Fonctions H-lipschitziennes de rapport 1

Rappelons que l'espace H de Cameron-Martin est compactement inclus dans E, et est en dualité hilbertienne avec l'espace H' complété de E' (dual de E) muni de la topologie induite par $L^2(\mu)$.

On s'intéresse maintenant aux fonctions f finies presque partout et telles que $N_\infty(\Gamma f) \leq 1$. (Cela entraîne que $f \in \cap_p W^{1,p}(\mu)$ d'après notre théorème 4 appliqué à la suite $n\mathrm{Arctg}(f/n)$).

On sait alors d'après Enchev et Stroock [ES] que f admet une modification $\widetilde{f}$ qui est H-lipschitzienne de rapport 1 , c'est à dire vérifie

$$\widetilde{f}(x+u) \leq \widetilde{f}(x) + |u|_H \tag{1}$$

pour tout couple $(x,u) \in E \times H$. Il est d'ailleurs facile d'obtenir $\widetilde{f}$ en considérant une suite d'espérances conditionnelles comme dans l'exemple qui suit le théorème 4. Les fonctions $\widetilde{f}_n$ sont continues, et leur limite supérieure $\widetilde{f}$ vérifie (1). On notera que la fonction $\widetilde{f}$ appartient à $\cap_p \mathcal{L}^1(C_{1,p})$.

8 Théorème : *soient A et B deux ensembles boréliens complémentaires sur lesquels on a respectivement $f \leq c$ et $f \geq c$ presque partout. Alors pour tout $\lambda \geq 0$*

$$\mu(\{\, |f-c| > \lambda \,\}) \leq \int_{\lambda+\alpha}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\, dt/\sqrt{2\pi} + \int_{\lambda-\alpha}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\, dt/\sqrt{2\pi} \tag{2}$$

où α est défini par $\mu(A) = \mathrm{Erf}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} \mathrm{e}^{-t^2/2}\, dt/\sqrt{2\pi}$.

Démonstration : notons φ_A la H-distance à A définie par

$$\varphi_A(x) = \mathrm{Inf}\{\, |x-y|_H \;\big|\; y \in A \,\}$$

(*cf.* [FLP2]). On a $f - c \leq \varphi_A$ et $-f + c \leq \varphi_B$, donc $|f-c| \leq \varphi_A \vee \varphi_B$. La formule (2) découle alors de l'inégalité de Borell [B] selon laquelle $\mu(\{\, \varphi_A >$

$\lambda\,\}) \leq 1 - \mathrm{Erf}(\lambda + \alpha)$ et $\mu(\{\,\varphi_B > \lambda\,\}) \leq 1 - \mathrm{Erf}(\lambda - \alpha)$ car $\mu(B) = 1 - \mu(A) = 1 - \mathrm{Erf}(\alpha) = \mathrm{Erf}(-\alpha)$.

9 Remarque : le second membre de (2) vaut aussi $2 - 2\mathrm{Erf}(\lambda) + \alpha^2 \xi\, \mathrm{e}^{-\xi^2/2} / \sqrt{2\pi}$ où ξ est un nombre de l'intervalle $[\lambda - \alpha, \lambda + \alpha]$.

Disons que c est une *médiane* de f si l'on est dans les conditions du théorème 8 et si de plus A et B sont complémentaires. Une telle médiane existe toujours car μ est diffuse.

10 Corollaire : *si c est une médiane de f, on a*

$$\mu(\{\,|f - c| > \lambda\,\}) \leq 2 \int_\lambda^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\, dt/\sqrt{2\pi} \tag{3}$$

et

$$\int \exp(\alpha |f - c|^2) d\mu \leq \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha}} \tag{4}$$

Démonstration : en effet, dans ce cas $\mu(A) = \mu(B) = \frac{1}{2}$, donc $\alpha = 0$. L'inégalité (4) se déduit de (3) par un calcul facile.

11 Remarque : la méthode d'Ustünel [U1-U2], utilisant la formule de Clark, convient au cas où la médiane c est remplacée par la *moyenne* $\mu(f)$.
On trouve alors la majoration (4') $\int \exp(\alpha |f - \mu(f)|^2) \leq 1/\sqrt{1 - 2\alpha}$, mais on ne trouve que la majoration (3') $\mu(\{\,|f - \mu(f)| > \lambda\,\}) \leq 2\exp(-\lambda^2/2)$ moins précise que (3). Cependant Kusuoka [K] cite la majoration (3) avec $\mu(f)$ au lieu de c.

12 Corollaire : *la fonction* $\exp(\alpha f^2)$ *est intégrable pour* $2\alpha < 1$.

13 Remarque : soit q une semi-norme généralisée et finie presque partout sur E. Il est bien facile de voir que q est majorée par une semi-norme analogue q_1 borélienne sur E. La restriction de q_1 à H est alors finie continue car H est inclus dans tout sous-espace de E portant μ (*cf.* [FLP3]). Il en est bien sûr de même de la restriction de q à H. Mais alors q/σ est H-lipschitzienne de rapport 1 pour σ convenable, et par suite $q \in \cap_p W^{1,p}(\mu)$, ce qui redémontre le théorème bien connu de Fernique. On sait aussi par ailleurs ([FLP1]) que $q \in \cap_p \mathcal{L}^1(C_{1,p})$ (et même mieux).

Problème : si f est H-lipschitzienne de rapport 1 , elle a une modification $\widetilde{f}$ qui est H-lipschitzienne de rapport 1 et $C_{1,p}$-quasi-continue pour tout $p > 1$. Mais f elle-même est-elle $C_{1,p}$-quasi-continue ? C'est bien sûr le cas en dimension finie.

Bibliographie

[B] Ch.Borell *The Brunn-Minkowski Inequality in Gauss Space*
Inventiones Math. 30,207-216, (1975)

[BH] N.Bouleau, F.Hirsch *Dirichlet Forms and Analysis on Wiener Space*
de Gruyter Studies in Math. 14, (1991)

[D] L.Denis *Convergence quasi-partout pour les capacités définies par un semi-groupe sous-markovien*
CRAS, Paris, série I, t.315, (1992)

[ES] O.Enchev, D.W.Stroock *Rademacher's Theorem for Wiener Functionals*
Ann. Probab. 21 n°1 (1993)

[F1] D.Feyel *Espaces de Banach adaptés, quasi-topologie et balayage*
Sém. Théorie du Potentiel, Paris, Lec.Notes in Math. 681, Springer, (1978)

[F2] D.Feyel *Transformations de Hilbert-Riesz*
CRAS, Paris, série I, t.310, 653-655, (1990)

[FLP1] D.Feyel, A.de La Pradelle *Capacités gaussiennes*
Ann. Inst. Fourier, t.41, f.1, p.49-76, (1991)

[FLP2] D.Feyel, A.de La Pradelle *Démonstration géom. d'une loi de tout ou rien*
Publication de l'Université d'Evry-Val d'Essonne, (1993)

[FLP3] D.Feyel, A.de La Pradelle *Opérateurs linéaires gaussiens*
A paraître in Potential Analysis (1992)

[K] S.Kusuoka *Analysis on Wiener Spaces.I.*
J.of Functional Analysis, 98,122-168, (1991)

[P] G.Pisier *Probabilistic methods in the Geometry of Banach spaces*
Probability and Analysis, Varenna-Como 1985, LN.in Math n°1206, (1986)

[Sc] L.Schwartz *Théorie des distributions, tome II*
Paris, Hermann, ASI 1122, (1959)

[St] E.M.Stein *Singular integrals and differentiability properties of functions*
Princeton University Press, (1970)

[U1] A.S.Ustünel *Intégrabilité exponentielle des fonctionnelles de Wiener*
CRAS, série I, t.315,997-1000, (1992)

[U2] A.S.Ustünel *Exponential tightness of the Wiener Functionals*
Preprint Series, University of Oslo, ISBN 82-553-0854-7, (1993)